TD 2. Équivalence logique, formes normales

Dans les exercices qui suivent, P, Q et R dénotent des propositions tirées de $\mathcal{P}_0$.

Définition 0.1. Si φ et ψ sont deux formules de la logique propositionnelle, ψ est une *conséquence* de φ si toute interprétation qui satisfait φ satisfait aussi ψ. On le note $\varphi \vDash \psi$.

Définition 0.2. Deux formules φ et ψ sont *équivalentes* si $\varphi \vDash \psi$ et $\psi \vDash \varphi$.

Exercice 1. Équivalences et conséquences logiques

Pour chaque couple de formules φ, ψ dans la liste suivante, dire si elles sont équivalentes, ou bien si $\varphi \vDash \psi$ et $\psi \nvDash \varphi$, ou bien si $\varphi \nvDash \psi$ et $\psi \vDash \varphi$ ou enfin si $\varphi \nvDash \psi$ et $\psi \nvDash \varphi$.
A. $P \Rightarrow Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ B. $P \wedge (\neg Q \vee R)$, $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$ C. $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow Q \vee R$
D. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$, $P \Rightarrow (\neg Q \vee R)$

Exercice 2. Conséquence et implication

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Montrer que ψ est conséquence de φ si et seulement si la formule $\varphi \Rightarrow \psi$ est valide.

Exercice 3. Engendrer des équivalences par substitution

Montrer que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles équivalentes, et σ est une substitution propositionnelle, alors les formules $\varphi\sigma$ et $\psi\sigma$ sont équivalentes.

En déduire que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles, les formules $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg\varphi \vee \neg\psi$ sont équivalentes.

Exercice 4. Forme normale négative

$$
\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(P) &\stackrel{\text{def}}{=} P\,, & \mathrm{nnf}(\neg P) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P\,,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\,, & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\,, & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,\\
& & \mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

Calculer $\mathrm{nnf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Exercice 5. Formes clausales

(littéraux) $\ell ::= P \mid \neg P$
(formules) $\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi')\,.$$

$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi')\,.$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1\leq i\leq m} \bigvee_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1\leq i\leq m} \bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

(a) Calculer $\mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique ?

(b) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale conjonctive est valide.

(c) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 6. Forme clausale equi-satisfiable

Voici un algorithme qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ donnée sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ, on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \mathcal{P}_0(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2 \ , \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \ . \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.

Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ.

(a) Calculer la forme normale négative de la *loi de* PEIRCE $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

(b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.

(c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.