TD 3. Modélisation à l'aide de formules propositionnnelles

Exercice 1. Encore sur les substitutions

Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\sigma_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\sigma_2 = [(Q \wedge P)/Q]$, et l'interprétation $I = [\top/P, \perp/Q, \perp/R, \perp/S]$

(a) Calculer les formules $\varphi\sigma_1$ et $\varphi\sigma_2$.

(b) Calculer les interprètations I^{σ_1} et I^{σ_2}.

(c) Vérifier que $[\![\varphi\sigma_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I^{\sigma_1}}$ et que $[\![\varphi\sigma_2]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I^{\sigma_2}}$.

(d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

Exercice 2. Tables de vérité et formes normales disjonctives

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

(a) Calculer la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule sous dnf équivalente à φ.

(b) Calculer dnf(nnf(φ)) et vérifier que cette formule est équivalente à φ.

Pour modéliser un problème en logique propositionnelle il faut se donner, pour chaque instance $\mathcal{I}$ du problème, une formule propositionnelle $\varphi_{\mathcal{I}}$ telle que :

— chaque interprétation qui satisfait $\varphi_{\mathcal{I}}$ correspond à une solution de $\mathcal{I}$.

— chaque solution de $\mathcal{I}$ correspond à une affectation qui satifait $\varphi_{\mathcal{I}}$.

Quand les variables du problème sont booléennes, le choix des propositions de $\varphi_{\mathcal{I}}$ est simple. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir judicieusement les propositions, briques de base de la modélisation.

Si $\varphi_{\mathcal{I}}$ est sous cnf, sa satisfiabilité peut être étudiée à l'aide d'un solveur SAT basé sur l'algorithme DPLL.

Exercice 3. Sudoku (très simplifié)

Une instance du jeu Sudoku$^-$ de côté n est constitué d'une grille carrée de dimension $n \times n$. À chaque case de la grille doit être affectée une valeur entre 1 et n. L'affectation doit satisfaire les contraintes suivantes :

Lignes : chaque valeur de 1 à n doit apparaître exactement une fois sur chaque ligne.

Colonnes : chaque valeur de 1 à n doit apparaître exactement une fois sur chaque colonne.

Case pré-remplie : certaines cases doivent contenir une valeur prédefinie (ce sont les seules contraintes qui dépendent de l'instance).

(a) Choisir les propositions pour la modélisation du Sudoku$^-$ (idée : pour une case donnée, il faudra autant de proposition que de valeurs possibles pour le remplissage de la case, c.à.d. n)

(b) Donner les formules sous cnf modélisant le fait que chaque case d'une grille résolue contient un (et un seul) entier.

(c) Donner les formules sous cnf modélisant les contraintes de ligne, de colonne et de case pré-remplie.

(d) (À faire chez vous) Dans le vrai Sudoku on a $n = 9$ et il existe une contrainte supplementaire. Quelle est cette contrainte et comment l'exprimer par une formule sous cnf ?

Exercice 4. Fonctions, injections, surjections, bijections

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble d'agents, et $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ un ensemble de ressources. Nous allons utiliser la logique propositionnelle pour décrire une relation d'accessibilité entre agents et ressources, et nous utilisons pour cela les propositions $P_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, telles que $P_{i,j}$ est vraie ssi l'agent a_i a accès à la ressource b_j. Écrire des formules propositionnelles sous cnf qui modélisent les problèmes/contraintes suivants :

(a) chaque agent a accès à au moins une ressource. Appelons φ cette formule.

(b) chaque agent a accès à au plus une ressource. Appelons ψ cette formule.

(c) que modélise la formule $\varphi \wedge \psi$?

(d) chaque ressource est accessible par au moins un agent. Appelons θ cette formule.

(e) chaque ressource est accessible par au plus un agent. Appelons ξ cette formule.

(f) que modélisent les formules
$\varphi \wedge \psi \wedge \theta$, $\varphi \wedge \psi \wedge \xi$?, $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \wedge \xi$?