TD 5. Modélisation, DPLL et calcul des séquents

Exercice 1. Modélisation par recouvrement exact et résolution par DPLL

Le problème de recouvrement exact peut être décrit abstraitement de la manière suivante : étant donnée une matrice de 0s et de 1s, existe-t-il un ensemble de lignes contenant exactement un 1 dans chaque colonne ?

(a) La matrice suivante a-t-elle un tel ensemble de lignes ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Le premier intérêt du problème de recouvrement exact est qu'il est facile à coder dans SAT-CNF. Étant donné un problème de recouvrement exact, expliquer comment construire une formule en CNF φ telle que les interprétations qui satisfont φ correspondent aux solutions du problème de recouvrement exact.

(c) Appliquer cette méthode à la matrice ci-dessus et appliquer DPLL à la CNF obtenue.

(d) Le second intérêt du problème de recouvrement exact est qu'il permet d'encoder simplement un grand nombre de problèmes combinatoires naturels. Étant donnée une grille de Sudoku 9×9 à résoudre, expliquer comment construire un problème de recouvrement exact dont les solutions correspondent à celles de la grille.

Exercice 2. Recherche de preuves en calcul des séquents

On rappelle les règles du calcul des séquents[1] :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P}\,(\mathrm{ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\,(\vee) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\,(\wedge)$$

où les formules sont toutes en forme normale négative :

$$\varphi, \psi ::= P \mid \neg P \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi$$

Pour chacune des formules suivantes, après l'avoir mise en forme normale négative, donner une preuve en calcul des séquents ou une contre-interprétation :

(a) $P \vee \neg P$

(b) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

(c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(d) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

(e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(f) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

(g) $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1. Techniquement, du calcul des séquents classique, monolatère, inversible, sans coupure.

(h) $P \land (Q \lor R) \Rightarrow (P \land Q) \lor R$

(i) $(P \land Q) \lor R \Rightarrow P \land (Q \lor R)$

(Dans ces formules, $\Rightarrow$ est associatif à droite et $\land$ et $\lor$ sont prioritaires sur $\Rightarrow$.)

Exercice 3. Propriété de la négation définie par induction

Sur les formules en forme normale négative, on peut définir un operateur de négation $\overline{(\cdot)}$ par induction :

$$\overline{P} = \neg P \qquad \overline{\neg P} = P \qquad \overline{\varphi \land \psi} = \overline{\varphi} \lor \overline{\psi} \qquad \overline{\varphi \lor \psi} = \overline{\varphi} \land \overline{\psi}$$

et un operateur implication $\dot{\Rightarrow}$ définie comme

$$\varphi \dot{\Rightarrow} \psi = \overline{\varphi} \lor \psi\,.$$

(a) Démontrer que la négation définie $\overline{(\cdot)}$ est équivalente à la négation habituelle $\neg$, au sens où pour toute formule φ en forme normale négative, les formules $\neg\varphi$ et $\overline{\varphi}$ sont sémantiquement équivalentes.

(b) Démontrer que la négation ainsi définie est involutive, c'est-à-dire que pour toute formule φ, $\overline{\overline{\varphi}} = \varphi$.

(c) Démontrer que pour toutes formules φ et ψ, $\overline{\varphi \dot{\Rightarrow} \psi} = \varphi \land \overline{\psi}$.

Exercice 4. Règles dérivables en calcul des séquents

Montrer que la règle d'axiome généralisée

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}}\,(\mathrm{ax})$$

est dérivable. Autrement dit, montrer que le séquent $\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}$ est prouvable pour tout multi-ensemble de formules propositionnelles Γ et toute formule propositionnelle φ.

Exercice 5. Règles admissibles en calcul des séquents

Montrer que la règle d'affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \varphi}\,(\mathrm{W})$$

est admissible. Autrement dit, montrer que pour tout séquent $\vdash \Gamma$ qui est prouvable et pour toute formule propositionnelle φ, le séquent $\vdash \Gamma, \varphi$ est prouvable aussi.