# **TD 6.** Calcul des séquents

**Exercice 1.** Recherche de preuves en calcul des séquents

On rappelle les règles du calcul des séquents[1] :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P}\,(\text{ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\,(\vee) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\,(\wedge)$$

où les formules sont toutes en forme normale négative :

$$\varphi, \psi ::= P \mid \neg P \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi$$

Pour chacune des formules suivantes, après l'avoir mise en forme normale négative, donner une preuve en calcul des séquents ou une contre-interprétation :

(a) $P \vee \neg P$

(b) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

(c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(d) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

(e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(f) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

(g) $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

(h) $P \wedge (Q \vee R) \Rightarrow (P \wedge Q) \vee R$

(i) $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R)$

(Dans ces formules, $\Rightarrow$ est associatif à droite et $\wedge$ et $\vee$ sont prioritaires sur $\Rightarrow$.)

**Exercice 2.** Propriété de la négation définie par induction

Sur les formules en forme normale négative, on peut définir un operateur de négation $\overline{(\cdot)}$ par induction :

$$\overline{P} = \neg P \qquad \overline{\neg P} = P \qquad \overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} \qquad \overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$$

et un operateur implication $\dot{\Rightarrow}$ définie comme

$$\varphi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \psi = \overline{\varphi} \vee \psi\,.$$

(a) Démontrer que la négation définie $\overline{(\cdot)}$ est équivalente à la négation habituelle $\neg$, au sens où pour toute formule $\varphi$ en forme normale négative, les formules $\neg\varphi$ et $\overline{\varphi}$ sont sémantiquement équivalentes.

(b) Démontrer que la négation ainsi définie est involutive, c'est-à-dire que pour toute formule $\varphi$, $\overline{\overline{\varphi}} = \varphi$.

(c) Démontrer que pour toutes formules $\varphi$ et $\psi$, $\overline{\varphi \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \psi} = \varphi \wedge \overline{\psi}$.

**Exercice 3.** Règles dérivables en calcul des séquents

Montrer que la règle d'axiome généralisée

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}}\,(\text{ax})$$

est dérivable. Autrement dit, montrer que le séquent $\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}$ est prouvable pour tout multi-ensemble de formules propositionnelles $\Gamma$ et toute formule propositionnelle $\varphi$.

1. Techniquement, du calcul des séquents classique, monolatère, inversible, sans coupure.

**Exercice 4.** Règles admissibles en calcul des séquents

(a) Montrer que la règle d'affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathrm{W})$$

est admissible. Autrement dit, montrer que pour tout séquent $\vdash \Gamma$ qui est prouvable et pour toute formule propositionnelle $\varphi$, le séquent $\vdash \Gamma, \varphi$ est prouvable aussi.

(b) Si $\sigma$ est une substitution propositionnelle à valeur dans les formules en forme normale négative et si $\varphi$ est une formule en forme normale négative alors la formule $\varphi\sigma$ est définie par induction sur $\varphi$ :

$$P\sigma = \sigma(P) \qquad (\neg P)\sigma = \overline{\sigma(P)} \qquad (\varphi \vee \psi)\sigma = \varphi\sigma \vee \psi\sigma \qquad (\varphi \wedge \psi)\sigma = \varphi\sigma \wedge \psi\sigma$$

et si $\Gamma$ est un multiensemble de formules, le multiensemble $\Gamma\sigma$ est défini par :

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\sigma = \varphi_1\sigma, \ldots, \varphi_n\sigma$$

Montrer que pour toute substitution propositionnelle $\sigma$, à valeur dans les formules en forme normale négative, la règle suivante est admissible :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\sigma}\ (\sigma)$$