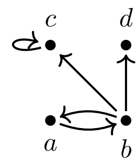
TD 8. Logique du premier ordre : sémantique et formes normales

Exercice 1. Un graphe orienté vu comme interprétation

Considérons le graphe orienté suivant :



On peut voir ce graphe comme interprétation I d'une signature avec une relation binaire, R. Le domaine de I est $D_I = \{a, b, c, d\}$, et $R^I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (b, d)\}$.

Pour chacune des formules suivantes, (a) donner une valuation ρ telle que la formule est satisfaite par (I, ρ), ou montrer que la formule n'est pas satisfiable dans I ; et (b) montrer que I est un modèle de la formule, ou donner une valuation qui montre que I n'est pas un modèle de la formule.

1. $R(x, x)$
2. $R(x, y) \wedge R(y, x)$
3. $\exists y.(R(x, y) \wedge R(y, z))$
4. $\exists x.R(x, y)$
5. $\forall x.\neg R(x, y)$
6. $\exists y.R(x, y)$

Exercice 2. Satisfiabilité et validité

Pour chacune des formules suivantes, déterminer (a) si elles sont satisfiables, (b) si elles ont un modèle, (c) si elles sont valides. Motiver toutes vos réponses en donnant des exemples et des preuves le cas échéant.

1. $\forall x.\big(P(x) \Rightarrow P(z)\big)$
2. $\forall x.\forall y.\big(P(x) \Leftrightarrow \neg P(y)\big)$
3. $R(x, x) \Rightarrow \exists y.\ R(x, y)$
4. $\exists y.R(x, y) \Rightarrow R(x, x)$
5. $\neg P(y) \wedge \big(\exists y.\ P(y)\big)$
6. $\exists x.\forall y.\ \big(\big(P(x) \vee P(y)\big) \Rightarrow P(y)\big)$

Rappelons la définition d'α-renommage, un concept qui est utilisé dans les exercices 3 et 4. Considérons une formule $\varphi = \exists x.\psi$. Soit x' une variable qui n'est pas libre dans ψ et telle que la substitution $[x'/x]$ soit applicable à ψ. L'*α-renommage $x \mapsto x'$* de φ est la formule $\exists x'.\psi[x'/x]$.

Exercice 3. Forme prenexe

Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.\psi$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pour tout i et ψ est sans quantificateur, c'est à dire ψ respecte la syntaxe abstraite $\psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi$.

Pour transformer une formule en une formule équivalente sous forme prénexe, nous la mettons d'abord sous forme normale négative. Ensuite, nous choisissons un α-renommage tel qu'aucune variable ne soit liée par deux quantificateurs, ce qui nous permet de sortir les quantificateurs.

Mettre les formules suivantes sous forme prenexe :

1. $\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)$
2. $\neg\forall x.(\neg P(x) \vee \forall y.\neg Q(y))$
3. $(\forall x.\exists y R(x,y)) \Rightarrow \forall x.R(x,x)$

Exercice 4. Substitutions et α-renommage

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables domaine et image de σ.

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}.$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x,y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α-renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

1. $R(x,y) \wedge \exists x.R(x,x)$
2. $\exists x.R(f(x),y)$
3. $\exists z.R(f(x),z)$
4. $\forall x \exists y.R(x,y)$