

TD 9. Logique du premier ordre : skolémisation, théories et modèles

Exercice 1. Substitutions et α -renommage

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables domaine et image de σ .

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x, y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α -renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

- (a) $R(x, y) \wedge \exists x.R(x, x)$
- (b) $\exists x.R(f(x), y)$
- (c) $\exists z.R(f(x), z)$
- (d) $\forall x \exists y.R(x, y)$

Exercice 2. Skolémisation

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{B^{(1)}, P^{(2)}\}.$$

Pour chaque formule ci-dessous déterminer si elle est satisfiable, donner une formule équivalente sous forme prénexe et trouver sa skolémisation.

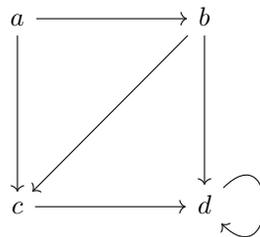
- (a) $\forall x. \exists y. P(x, y)$
- (b) $\forall x. P(x, x) \wedge \neg \forall x. \forall y. P(x, y)$
- (c) $\forall x. (B(x) \wedge \exists y. \neg B(y))$
- (d) $\forall x. \neg \exists y. \forall z. (P(x, g(z, z)) \wedge P(f(z), y))$

Exercice 3. Théories logiques : axiomatisation d'une structure

Considérons la signature

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$$

et soit I l'interprétation de domaine $D_I = \{a, b, c, d\}$, où $=^I$ est la relation d'égalité sur D_I et R^I est la relation d'adjacence du graphe suivant :



Rappelons que la théorie de I est définie comme l'ensemble des formules closes dont I est un modèle, c'est-à-dire,

$$\text{Th}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid I \models \varphi\}.$$

- (a) Lesquelles des formules suivantes appartiennent à $\text{Th}(I)$?
1. $\forall x.\exists y.R(x, y)$
 2. $\forall x.\forall y.(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
 3. $\exists x.(R(x, x) \wedge \forall y.R(y, x))$
 4. $\exists z.(R(x, z) \wedge R(z, y))$
- (b) Donner une axiomatisation A telle que la théorie de A soit égale à $\text{Th}(I)$. Rappelons que la théorie de A est définie comme l'ensemble

$$\text{Th}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid A \models \varphi\}$$

des conséquences logiques closes de A .

Exercice 4. Théories logiques : axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une k -clique d'un graphe est un sous-ensemble de sommets de cardinalité k tels que chaque deux sommets sont adjacents, c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.

Reprenons la signature de l'exercice précédent. Trouver une axiomatisation $A_{k\text{-clique}}$, tel que $I \models A_{k\text{-clique}}$ si et seulement si (D_I, R^I) est un graphe qui a une k -clique et $=^I$ est une congruence sur D_I , c'est-à-dire, $=^I$ est une relation d'équivalence sur D_I et deux sommets équivalents ont les mêmes prédécesseurs et les mêmes successeurs.