TD 9. Logique du premier ordre : skolémisation, théories et modèles

Exercice 1. Substitutions et α-renommage

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables domaine et image de σ.

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x,y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α-renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

(a) $R(x,y) \wedge \exists x.R(x,x)$

(b) $\exists x.R(f(x),y)$

(c) $\exists z.R(f(x),z)$

(d) $\forall x \exists y.R(x,y)$

Exercice 2. Skolémisation

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{B^{(1)}, P^{(2)}\}.$$

Pour chaque formule ci-dessous déterminer si elle est satisfiable, donner une formule équivalente sous forme prénexe et trouver sa skolémisation.

(a) $\forall x.\exists y.P(x,y)$

(b) $\forall x.P(x,x) \wedge \neg\forall x.\forall y.P(x,y)$

(c) $\forall x.\big(B(x) \wedge \exists y.\neg B(y)\big)$

(d) $\forall x.\neg\exists y.\forall z.\big(P(x,g(z,z)) \wedge P(f(z),y)\big)$

Exercice 3. Théories logiques : axiomatisation d'une structure

Considérons la signature

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$$

et soit I l'interprétation de domaine $D_I = \{a,b,c,d\}$, où $=^I$ est la rélation d'égalité sur D_I et R^I est la relation d'adjacence du graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[dl] \arrow[d] \\
c \arrow[r] & d \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Rappelons que la théorie de I est définie comme l'ensemble des formules closes dont I est un modèle, c'est-à-dire,

$$\mathrm{Th}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid I \vDash \varphi\}\,.$$

.

(a) Lesquelles des formules suivantes appartiennent à $\mathrm{Th}(I)$?

1. $\forall x.\exists y.R(x,y)$
2. $\forall x.\forall y.\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)\big)$
3. $\exists x.\big(R(x,x) \wedge \forall y.R(y,x)\big)$
4. $\exists z.\big(R(x,z) \wedge R(z,y)\big)$

(b) Donner une axiomatisation A telle que la théorie de A soit égale à $\mathrm{Th}(I)$. Rappelons que la théorie de A est définie comme l'ensemble

$$\mathrm{Th}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid A \vDash \varphi\}$$

des conséquences logiques closes de A.

Exercice 4. Théories logiques : axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une k-clique d'un graphe est un sous-ensemble de sommets de cardinalité k tels que chaque deux sommets sont adjacents, c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.

Reprenons la signature de l'exercice précédent. Trouver une axiomatisation $A_{k\text{-}clique}$, tel que $I \vDash A_{k\text{-}clique}$ si et seulement si (D_I, R^I) est un graphe qui a une k-clique et $=^I$ est une congruence sur D_I, c'est-à-dire, $=^I$ est une relation d'équivalence sur D_I et deux sommets équivalents ont les mêmes prédécesseurs et les mêmes successeurs.