TD 10. Axiomatisation, modélisation, élimination des quantificateurs

Exercice 1. Théories logiques : axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une k-clique d'un graphe est un sous-ensemble de sommets de cardinalité k tels que chaque deux sommets sont adjacents, c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.

Soit la signature $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$. Trouver une axiomatisation $A_{k\text{-}clique}$, tel que $I \vDash A_{k\text{-}clique}$ si et seulement si (D_I, R^I) est un graphe qui a une k-clique et $=^I$ est une congruence sur D_I, c'est-à-dire, $=^I$ est une relation d'équivalence sur D_I et deux sommets équivalents ont les mêmes prédécesseurs et les mêmes successeurs.

Exercice 2. Modélisation : problème du rendu de monnaie

Le *problème du rendu de monnaie* est le problème algorithmique NP-complet suivant : étant donnée une liste $v_1, \ldots, v_k$ de valeurs de pièces et une somme S, trouver le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme S.

Dans cet exercice, nous modélisons ce problème comme un problème SMT, plus précisement, comme un problème de satisfiabilité modulo la théorie de $(\mathbb{N}, +, <)$.

Commençons par un exemple. Supposons que nous avons des pièces de 10, 20 et 50 centimes, et que nous voulons rendre une somme de 1,10 euro. Dans la notation ci-dessus : $k = 3$, $v_1 = 10$, $v_2 = 20$, $v_3 = 50$, et $S = 110$.

(a) Trouver le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme $S = 110$ donnée.

(b) Écrire une formule atomique qui exprime que la combinaison lineaire positive de x_1 pièces de 10, x_2 pièces de 20, et x_3 pièces de 50 donne la somme S.

(c) Généraliser la formule trouvée dans la question précedente pour le cas d'une liste de valeurs quelconque, de longeur k quelconque.

(d) Écrire une formule atomique qui exprime que, si pour tout $1 \leq i \leq k$, x_i dénote le nombre de pièces de valeur v_i utilisé, nous avons utilisé exactement m pièces.

(e) Écrire une formule existentielle, $\varphi(m)$ à une variable libre, m, qui exprime qu'il existe une manière de rendre la somme S en utilisant exactement m pièces.

(f) En utilisant la formule $\varphi(m)$ de la question précedente, écrire une formule $\psi(m)$ à une variable libre, m, qui exprime que m est le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme S.

Exercice 3. Élimination des quantificateurs

Pour obtenir une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique lineaire rationnelle, nous pouvons executer l'algorithme suivant :

(1) Mettre la formule sous forme prénexe.

(2) Remplacer chaque quantificateur $\forall$ par $\neg\exists\neg$, et faire entrer la deuxième négation.

(3) Isoler la variable liée par le quantificateur le plus intérieur, et éliminer ce quantificateur.

(4) Procéder avec (3) jusqu'à ce que tous les quantificateurs $\exists$ sont éliminés.

(5) Mettre le résultat en forme de combinaison positive de formules atomiques.

Rappellons aussi que, modulo la théorie de l'arithmétique lineaire rationnelle, on a les équivalences suivantes :

$$\neg(s < t) \Leftrightarrow (s = t \vee t < s)$$
$$\exists(t < x \wedge x < t') \Leftrightarrow t < t'$$

Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, c'est-à-dire, la théorie de $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$.

(a) $\exists x.(3 < 2x \wedge 4x < y)$

(b) $\exists x.\neg(2x < 3x)$

(c) $\forall x.((\exists y.(y < x \wedge 5 < y)) \Rightarrow z < 2x)$