

TD 11. Calcul des séquents pour la logique du premier ordre

Exercice 1. Recherche de preuves en calcul des séquents

On rappelle les règles du calcul des séquents monolatère :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \ell, \bar{\ell}} \text{ (ax)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \bar{\varphi}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi} (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi} (\vee)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}{\vdash \Gamma, \forall x. \varphi} (\forall) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x. \varphi}{\vdash \Gamma, \exists x. \varphi} (\exists)$$

où $y \notin \text{fv}(\Gamma, \forall x. \varphi)$ où $t \in T(\mathcal{F}, X)$

Considérons la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{(0)}, f^{(1)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{P^{(1)}, R^{(2)}\}.$$

Pour chacune des formules suivantes, après l'avoir mise en forme normale négative, donner une preuve en calcul des séquents :

- (a) $\neg R(x, y) \vee \exists z. R(x, z)$
- (b) $(P(x) \wedge P(y)) \vee \exists x. \neg P(x)$
- (c) $\exists x. (P(f(x)) \Rightarrow P(x))$
- (d) $\forall x. P(x) \Rightarrow \forall x. (P(x) \vee P(y))$
- (e) $\forall x. \forall y. R(x, y) \Rightarrow \forall x. \forall y. R(y, x)$

Exercice 2. Élimination des coupures

- (a) Mettez la formule suivante sous forme normale négative :

$$(P(a) \wedge \forall x. (P(x) \Rightarrow P(f(x)))) \Rightarrow P(f(f(a)))$$

- (b) Trouver une preuve en calcul des séquents en utilisant la règle de coupure. Vous pouvez également utiliser la règle de contraction, qui est admissible :

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}{\vdash \Gamma, \varphi} \text{ (C)}$$

Pouvez-vous simplifier la preuve encore plus en utilisant une autre règle admissible ?

- (c) Ensuite, trouvez une preuve sans utiliser la règle de la coupure.

Exercice 3. Preuves en calcul des séquents : trouvez l'erreur

- (a) Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides et mettez-les sous forme normale négative.

1. $\exists x. P(x) \Rightarrow \forall x. P(x)$
2. $\exists x. (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x. P(x)$

- (b) Trouvez ensuite toutes les erreurs dans l'application des règles du calcul des séquents dans les arbres de dérivation suivants.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \neg P(x), P(x)} \text{ (ax)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x), P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x), \forall x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x) \vee \forall x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \neg P(x), \neg Q(x), P(x)} \text{ (ax)} \\
 \frac{}{\vdash \neg P(x) \wedge \neg Q(x), P(x)} \text{ (}\wedge\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)), P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)), \exists x. P(x)} \text{ (}\exists\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)}
 \end{array}$$

Exercice 4. Règles admissibles en calcul des séquents

Pour montrer que la règle d'affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (W)}$$

est admissible, on peut prouver par induction sur la profondeur de l'arbre de dérivation que $\vdash \Gamma$ implique $\vdash \Gamma, \Delta$ pour tout multi-ensemble Δ .

- (a) Considérez le cas particulier où $\Gamma = \{P(x), \forall x. (P(x) \vee \neg P(x))\}$ et $\Delta = \{P(y) \wedge \neg P(y)\}$. Donnez une preuve pour le séquent $\vdash \Gamma$ et obtenez ensuite une preuve pour $\vdash \Gamma, \Delta$.
- (b) Dans le cas général, on fait une distinction de cas selon la dernière règle employée dans la dérivation π de $\vdash \Gamma$. Donnez tous les détails de la preuve pour les cas (\exists) et (\forall) .