TD 3. Modélisation à l'aide de formules propositionnnelles

Exercice 1. Forme normale négative

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(P) &\stackrel{\text{def}}{=} P\ , & \mathrm{nnf}(\neg P) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
& & \mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}$$

Calculer $\mathrm{nnf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Exercice 2. Formes clausales

(littéraux) $\ell ::= P \mid \neg P$

(formules) $\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi')\ .$$

$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi')\ .$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1\leq i\leq m} \bigvee_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1\leq i\leq m} \bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

(a) Calculer $\mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique ?

(b) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale conjonctive est valide.

(c) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 3. Tables de vérité et formes normales disjonctives

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

(a) Calculer la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule sous dnf équivalente à φ.

(b) Calculer $\mathrm{dnf}(\mathrm{nnf}(\varphi))$ et vérifier que cette formule est équivalente à φ.

Exercice 4. Forme clausale equi-satisfiable

On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ, on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \mathrm{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2\ ,\\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2\ . \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule non littérale de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.
Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ.

(a) Calculer la forme normale négative de la *loi de* PEIRCE $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

(b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.

(c) Vérifier que la loi de Peirce est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.