TD 5. Modélisation et DPLL

Exercice 1. Au plus k parmi n, au moins k parmi n.

Cet exercice complète l'exercice 4 du TD n°4.

(a) Écrire deux formules propositionnelles φ_k et ψ_k en CNF n'utilisant que les propositions $P_1, \ldots, P_n$ telles que :

i. une interprétation I satisfait la formule φ_k si et seulement si au moins k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ sont satisfaites par I, et

ii. une interprétation I satisfait la formule ψ_k si et seulement si au plus k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ sont satisfaites par I.

(b) Que modélise la formule propositionnelle $\varphi_k \wedge \psi_k$?

(c) Quelle est la taille de φ_k en fonction de k et n ?

(d) En plus des propositions P_j pour $1 \leq j \leq n$, on va utiliser des propositions « auxiliaires » $Q_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$. On va relier ces nouvelles propositions $Q_{i,j}$ aux propositions P_j par

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(P_j \Leftrightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq k} Q_{i,j} \right) .$$

Écrire une formule propositionnelle χ_k utilisant uniquement les propositions $Q_{i,j}$ telle qu'une interprétation I satisfait exactement k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ si et seulement s'il existe une interprétation partielle J des propositions $Q_{i,j}$ telle que $IJ \vDash \vartheta \wedge \chi_k$.

Indication. La formule χ_k va exprimer que la relation définie par les propositions $Q_{i,j}$ est une fonction injective sous l'interprétation partielle J (pourquoi ?)

(e) Quelle est la taille de χ_k ?

Exercice 2. (DPLL à la main)

Nous rappellons que l'algorithme DPLL décide la satisfiabilité d'une formule en CNF par l'application des règles suivantes à l'ensemble de ses clauses, en priorisant les règles (unit) et (pure) (car elles ne demandent jamais un retour en arrière) avant de brancher avec (split_P) ou ($\mathsf{split}_{\neg P}$).

(unit)	$F \cup \{\{\ell\}\} \to_{\mathsf{dpll}} F[\top/\ell]$	
(pure)	$F \to_{\mathsf{dpll}} F[\top/\ell]$	où $\ell \in \mathrm{Pur}(F)$
(split_P)	$F \to_{\mathsf{dpll}} F[\top/P]$	où $P \in \mathrm{fp}(F)$
($\mathsf{split}_{\neg P}$)	$F \to_{\mathsf{dpll}} F[\top/\neg P]$	où $P \in \mathrm{fp}(F)$

Appliquer l'algorithme DPLL à la formule :

$$\begin{aligned} \varphi = \quad & (P \vee Q \vee R) \;\wedge\; (P \vee \neg Q \vee \neg R) \;\wedge\; (P \vee \neg S) \\ \wedge\; & (\neg Q \vee \neg R \vee \neg S) \;\wedge\; (\neg P \vee \neg Q \vee R) \;\wedge\; (T \vee U) \\ \wedge\; & (T \vee \neg U) \;\wedge\; (Q \vee \neg T) \;\wedge\; (\neg R \vee \neg T) \end{aligned}$$

Exercice 3. Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs affirme que k pigeons peuvent être mis dans n tiroirs, de manière à ce que chaque pigeon soit dans un tiroir distinct, si et seulement si $k \leq n$.

(a) Pour k, n fixés, donner un ensemble de propositions qui permettent de modéliser le placement des k pigeons dans les n tiroirs.

(b) Donner une formule sous CNF modélisant le fait que chaque pigeon est dans au moins l'un des tiroirs.

(c) Donner une formule sous CNF modélisant le fait chaque tiroir contient au plus un pigeon.

(d) Utiliser l'algorithme DPLL pour montrer que 2 pigeons peuvent se répartir entre 2 tiroirs.

(e) (Bonus) Utiliser l'algorithme DPLL pour montrer que 3 pigeons ne peuvent pas se repartir entre 2 tiroirs.

Exercice 4. Modélisation par recouvrement exact et résolution par DPLL

Le problème de recouvrement exact peut être décrit abstraitement de la manière suivante : étant donnée une matrice de 0s et de 1s, existe-t-il un ensemble de lignes contenant exactement un 1 dans chaque colonne ?

(a) La matrice suivante a-t-elle un tel ensemble de lignes ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Le premier intérêt du problème de recouvrement exact est qu'il est facile à coder dans SAT-CNF. Étant donné un problème de recouvrement exact, expliquer comment construire une formule en CNF φ telle que les interprétations qui satisfont φ correspondent aux solutions du problème de recouvrement exact.

(c) Appliquer cette méthode à la matrice ci-dessus et appliquer DPLL à la CNF obtenue.

(d) Le second intérêt du problème de recouvrement exact est qu'il permet d'encoder simplement un grand nombre de problèmes combinatoires naturels. Étant donnée une grille de Sudoku 9×9 à résoudre, expliquer comment construire un problème de recouvrement exact dont les solutions correspondent à celles de la grille.