TD 1. Syntaxe et sémantique de la logique propositionnelle

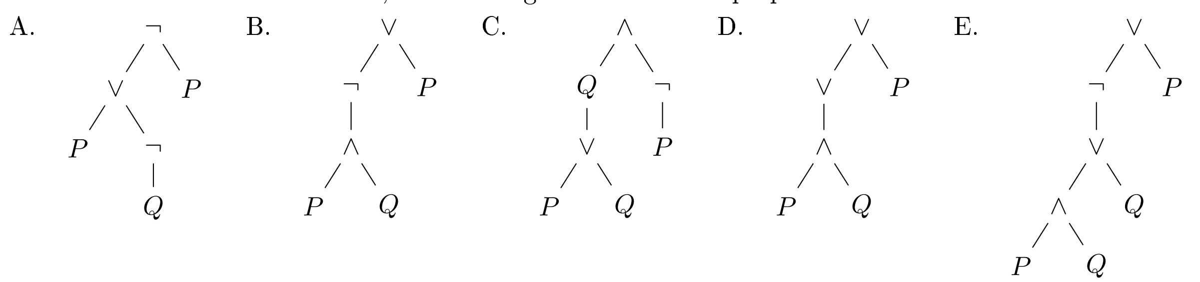
Rappelons que l'on se munit d'un ensemble dénombrable $\mathcal{P}_0$ de propositions, et que l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est défini par la syntaxe abstraite

$$\varphi ::= P \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$$

où $P \in \mathcal{P}_0$. Dans tout ce qui suit, P, Q, R dénotent des éléments de $\mathcal{P}_0$, et φ, ψ des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 1. Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il s'agit d'une formule propositionnelle. Justifier.



Exercice 2. Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

A. $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$ B. $\neg(\neg P \vee Q)$ C. $\neg(R \wedge \neg\neg P)$ D. $R \wedge \neg(P \vee Q \wedge \neg R)$

Exercice 3. Évaluation

Quelle est la sémantique des formules propositionnelles suivantes dans une interprétation I telle que $P^I = 1$, $Q^I = 0$ et $R^I = 0$?

A. $\neg Q$ B. $\neg(P \wedge \neg Q)$ C. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ D. $R \vee \neg(P \wedge Q)$ E. $P \wedge \neg Q \wedge R$

Exercice 4. Satisfiabilité

Pour chacune des formules propositionnelles φ suivantes, dire s'il y a une interprétation I qui la rend vraie (c'est-à-dire telle que $[\![\varphi]\!]^I = 1$) et le cas échéant, en donner une.

A. $Q \vee \neg Q$ B. $\neg(P \wedge \neg Q)$ C. $\neg(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$ D. $R \vee (P \wedge Q)$ E. $P \wedge \neg Q \wedge R$
F. $\neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

Exercice 5. Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor » $\downarrow$ à deux arguments définie par $0 \downarrow 0 = 1$ et $0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 1 \downarrow 1 = 0$. On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur.

(a) Montrer que $\varphi \downarrow \psi$ peut s'exprimer à l'aide de $\neg$ et $\vee$.

(b) Montrer que $\neg\varphi$ peut s'exprimer à l'aide de $\downarrow$.

(c) Montrer que $\varphi \vee \psi$ peut s'exprimer à l'aide de $\downarrow$.