

TD 3. Modélisation à l'aide de formules propositionnelles

Exercice 1. Forme normale négative

$$\begin{aligned} \text{nnf}(P) &\stackrel{\text{def}}{=} P, & \text{nnf}(\neg P) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P, \\ \text{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \vee \text{nnf}(\psi), & \text{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \wedge \text{nnf}(\neg\psi), \\ \text{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \wedge \text{nnf}(\psi), & \text{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \vee \text{nnf}(\neg\psi), \\ & & \text{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi). \end{aligned}$$

Calculer $\text{nnf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Exercice 2. Formes clausales

$$\begin{aligned} \text{(littéraux)} & \quad \ell ::= P \mid \neg P \\ \text{(formules)} & \quad \varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \end{aligned}$$

$$\text{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \text{cnf}(\varphi \vee \psi').$$

$$\text{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \text{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \text{dnf}(\varphi \wedge \psi').$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

- Calculer $\text{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique?
- Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale conjonctive est valide.
- Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 3. Tables de vérité et formes normales disjonctives

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

- Calculer la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule sous dnf équivalente à φ .
- Calculer $\text{dnf}(\text{nnf}(\varphi))$ et vérifier que cette formule est équivalente à φ .

Exercice 4. Forme clausale equi-satisfiable

On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont equi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ , on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \text{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2, \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2. \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi'} \text{ sous-formule non littérale de } \varphi (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.

Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ .

- (a) Calculer la forme normale négative de la *loi de PEIRCE* $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.
- (b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.
- (c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.