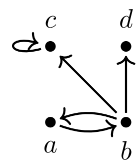
TD 8. Logique du premier ordre : sémantique, renommages, substitutions

Exercice 1. Un graphe orienté vu comme interprétation

Considérons le graphe orienté suivant :



On peut voir ce graphe comme interprétation I d'une signature avec une relation binaire, E. Le domaine de I est $D_I = \{a, b, c, d\}$, et $E^I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (b, d)\}$.

Pour chacune des formules suivantes, (a) donner une valuation ρ telle que la formule est satisfaite par (I, ρ), ou montrer que la formule n'est pas satisfiable dans I ; et (b) montrer que I est un modèle de la formule, ou donner une valuation qui montre que I n'est pas un modèle de la formule.

1. $E(x, x)$
2. $E(x, y) \wedge E(y, x)$
3. $\exists y.(E(x, y) \wedge E(y, z))$
4. $\exists x.E(x, y)$
5. $\forall x.\neg E(x, y)$
6. $\exists y.E(x, y)$

Exercice 2. Substitutions et α-renommage

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables domaine et image de σ.

Rappelons la définition d'α-*renommage*. Considérons une formule $\varphi = \exists x.\psi$. Soit x' une variable qui n'est pas libre dans ψ et telle que la substitution $[x'/x]$ soit applicable à ψ. L'α-*renommage* $x \mapsto x'$ de φ est la formule $\exists x'.\psi[x'/x]$.

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}.$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x, y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α-renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

1. $R(x, y) \wedge \exists x.R(x, x)$
2. $\exists x.R(f(x), y)$
3. $\exists z.R(f(x), z)$
4. $\forall x \exists y.R(x, y)$