TD 9. Logique du premier ordre : formes normales et skolémisation

Exercice 1. Forme normale négative

Rappel. Une formule du premier ordre est en *forme normale négative* si elle respecte la syntaxe abstraite

(littéraux)	$\ell ::= \alpha \mid \neg\alpha$
(formules en forme normale négative)	$\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi$

où α est une formule atomique et $x \in X$. En d'autres termes, les négations ne peuvent apparaître que devant des formules atomiques.

Pour une formule φ, sa forme normale négative $\mathrm{nnf}(\varphi)$ est obtenue inductivement par

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha\ , & \mathrm{nnf}(\neg\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}$$

Mettre sous forme normale négative les formules suivantes :

1. $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$
2. $\neg\forall x.\exists y.\forall z.(\neg R(x,z) \vee B(y))$
3. $(\exists x.B(x) \wedge \neg R(x,y)) \Rightarrow \neg\forall y.R(y,y)$

Exercice 2. Équivalences logiques

1. Considérons deux formules φ et ψ telles que $x \notin \mathrm{fv}(\varphi)$. Montrer les équivalences logiques suivantes
   (a) $(\forall x.\psi) \wedge \varphi \Leftrightarrow \forall x.(\psi \wedge \varphi)$
   (b) $(\exists x.\psi) \wedge \varphi \Leftrightarrow \exists x.(\psi \wedge \varphi)$
2. Les formules $(\forall x.P(x)) \vee \neg P(x)$ et $\forall x.(P(x) \vee \neg P(x))$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Exercice 3. Forme prénexe

Rappel. Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.\psi$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et ψ est sans quantificateur, c'est-à-dire ψ respecte la syntaxe abstraite

(formules sans quantificateur) $\qquad \psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi\ .$

Pour chaque formule donnée dans l'Exercice 1, trouver une formule équivalente sous forme normale prénexe. N'oubliez pas d'utiliser l'α-renommage si nécessaire.

Exercice 4. Skolémisation

Rappel. Une formule $\varphi = Q_1x_1 \dots Q_nx_n.\psi$ sous forme prénexe est *universelle* si $Q_i = \forall$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Le théorème de Skolem indique que pour chaque formule du premier ordre, il existe une formule universelle équi-satisfiable. Pour chacune des formules suivantes, trouver une telle formule universelle équi-satisfiable.

1. $\forall x.\exists y.(B(x) \vee \neg R(y,z))$
2. $\exists x.\forall y.\exists z.(R(x,y) \vee \neg R(y,z))$

Même question pour les formules de l'Exercice 1.