TD 10. Théories logiques

Exercice 1. Axiomes de l'égalité et congruences

Comme vu dans les exemples 15.2 et 15.3 des notes de cours, pour une signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ telle que $=^{(2)} \in \mathcal{P}$, la théorie de l'égalité $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{eq}})$ est la théorie définie par l'ensemble d'axiomes A_{eq} contenant

(réflexivité de $=$)	$\forall x.$	$x = x$
(symétrie de $=$)	$\forall x \forall y.$	$x = y \Rightarrow y = x$
(transitivité de $=$)	$\forall x \forall y \forall z.$	$(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$

Si $I \vDash A_{\mathrm{eq}}$, alors on appelle $=^I$ une *équivalence*. L'axiomatisation $A_{\mathrm{cgr}}(L)$ ajoute aux trois axiomes de A_{eq}, pour tout symbole de fonction f d'arité n dans $\mathcal{F}$,

(f-congruence) $\quad \forall x_1 \ldots \forall x_n . \forall y_1 \ldots \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$

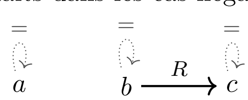
et pour tout symbole de relation R (différent de $=$) d'arité n dans $\mathcal{P}$

(R-congruence) $\quad \forall x_1 \ldots \forall x_n . \forall y_1 \ldots \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$

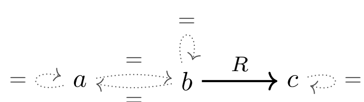
Si $I \vDash A_{\mathrm{cgr}}(L)$, alors on appelle $=^I$ une *congruence*.

(a) On pose $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{=^{(2)}, R^{(2)}\}$. Pour chacune des interprétations ci-dessous, dire si la relation $=^I$ (indiquée en pointillés) est une équivalence et si elle est une congruence ; préciser quels axiomes ne sont pas satisfaits dans les cas négatifs.

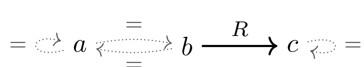
i.



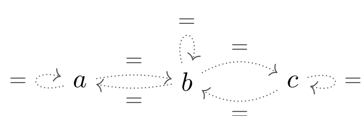
ii.



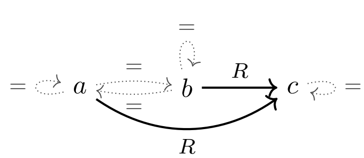
iii.



iv.



v.



(b) Même question pour l'interprétation ci-dessous mais en posant cette fois-ci $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(2)}\}$:

$$f^I(a,a) = f^I(a,b) = f^I(b,a) = f^I(b,b) = f^I(c,c) = c \,,$$
$$f^I(a,c) = f^I(c,a) = a \,, \qquad f^I(b,c) = f^I(c,b) = b.$$

i.
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "="] \arrow[r, bend left, "="] & b \arrow[loop above, "="] \arrow[l, bend left, "="] & c \arrow[loop right, "="] \end{tikzcd}$$

(c) Dans les cas des questions précédentes où la relation $=^I$ était une congruence, donner l'interprétation quotient $I/=^I$.

(d) Montrer que $\mathrm{Th}(A'_{\mathrm{eq}}) = \mathrm{Th}(A_{\mathrm{eq}})$ où A'_{eq} contient l'axiome de réflexivité de $=$ ainsi que l'axiome suivant :

$$\text{(axiome †)} \qquad \forall x \forall y \forall z. \qquad (x = y \land x = z) \Rightarrow y = z$$

Exercice 2. Axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une *k-clique* d'un graphe est un sous-ensemble de sommets de cardinalité k tels que chaque deux sommets sont adjacents, c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.
Soit la signature $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$. Trouver une axiomatisation $A_{k\text{-clique}}$, telle que, pour toute interprétation normale I, $I \vDash A_{k\text{-clique}}$ si et seulement si (D_I, R^I) est un graphe qui contient une k-clique.

Exercice 3. Théories axiomatiques triviales

(a) Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Montrer que $\varphi \in \mathrm{Th}(A)$ si et seulement si φ est une formule close valide.

(b) Soit A un ensemble de formules closes *valides*. Montrer que $\varphi \in \mathrm{Th}(A)$ si et seulement si φ est une formule close valide.

Exercice 4. Élimination des quantificateurs

Pour obtenir une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, nous pouvons exécuter l'algorithme suivant, similaire à ce qui a été vu dans la section 15.2.3 des notes de cours :

(1) Mettre la formule sous forme prénexe.
(2) Remplacer chaque quantificateur $\forall$ par $\neg\exists\neg$, et faire entrer la deuxième négation.
(3) Isoler la variable liée par le quantificateur le plus intérieur, et éliminer ce quantificateur.
(4) Procéder avec (3) jusqu'à ce que tous les quantificateurs $\exists$ soient éliminés.
(5) Mettre le résultat en forme de combinaison positive de formules atomiques.

Rappellons aussi que, modulo la théorie de l'arithmétique lineaire rationnelle, on a les équivalences suivantes :

$$\neg(s < t) \Leftrightarrow (s = t \lor t < s)$$
$$\exists(t < x \land x < t') \Leftrightarrow t < t'$$

Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, c'est-à-dire, la théorie de $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$.

(a) $\exists x.(3 < 2x \land 4x < y)$
(b) $\exists x.\neg(2x < 3x)$
(c) $\forall x.((\exists y.(y < x \land 5 < y)) \Rightarrow z < 2x)$

Exercice 5. * Examen 2019

On se place dans la théorie $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{ols}})$ des ordres linéaires stricts de l'exemple 15.6 des notes de cours. Montrer que la formule φ_5 donnée ci-dessous appartient à cette théorie :

$$\varphi_5 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y. \big(\neg(y < x) \Rightarrow \forall z.(x < z \lor x = z)\big)$$