

## TD 12. Calcul des séquents pour la logique du premier ordre

**Exercice 1.** Recherche de preuves en calcul des séquents

On rappelle les règles du calcul des séquents monolatère :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \Gamma, \ell, \bar{\ell}} \text{ (ax)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \bar{\varphi}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (cut)} \\
 \\
 \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi} (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi} (\vee) \\
 \\
 \frac{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}{\vdash \Gamma, \forall x. \varphi} (\forall) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x. \varphi}{\vdash \Gamma, \exists x. \varphi} (\exists) \\
 \text{où } y \notin \text{fv}(\Gamma, \forall x. \varphi) \qquad \text{où } t \in T(\mathcal{F}, X)
 \end{array}$$

Considérons la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{(0)}, f^{(1)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{P^{(1)}, R^{(2)}\}.$$

Pour chacune des formules suivantes, après l'avoir mise en forme normale négative, donner une preuve en calcul des séquents :

- (a)  $\neg R(x, y) \vee \exists z. R(x, z)$
- (b)  $(P(x) \wedge P(y)) \vee \exists x. \neg P(x)$
- (c)  $\exists x. (P(f(x)) \Rightarrow P(x))$
- (d)  $\forall x. P(x) \Rightarrow \forall x. (P(x) \vee P(y))$
- (e)  $\forall x. \forall y. R(x, y) \Rightarrow \forall x. \forall y. R(y, x)$

**Exercice 2.** Élimination des coupures

- (a) Mettez la formule suivante sous forme normale négative :

$$(P(a) \wedge \forall x. (P(x) \Rightarrow P(f(x)))) \Rightarrow P(f(f(a)))$$

- (b) Trouver une preuve en calcul des séquents en utilisant la règle de coupure. Vous pouvez également utiliser la règle de contraction, qui est admissible :

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}{\vdash \Gamma, \varphi} \text{ (C)}$$

Pouvez-vous simplifier la preuve encore plus en utilisant une autre règle admissible ?

- (c) Ensuite, trouvez une preuve sans utiliser la règle de la coupure.

**Exercice 3.** Preuves en calcul des séquents : trouvez l'erreur

- (a) Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides et mettez-les sous forme normale négative.

1.  $\exists x. P(x) \Rightarrow \forall x. P(x)$
2.  $\exists x. (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \exists x. P(x)$

- (b) Trouvez ensuite toutes les erreurs dans l'application des règles du calcul des séquents dans les arbres de dérivation suivants.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \neg P(x), P(x)} \text{ (ax)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x), P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x), \forall x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. \neg P(x) \vee \forall x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash \neg P(x), \neg Q(x), P(x)} \text{ (ax)} \\
 \frac{}{\vdash \neg P(x) \wedge \neg Q(x), P(x)} \text{ (}\wedge\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)), P(x)} \text{ (}\forall\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)), \exists x. P(x)} \text{ (}\exists\text{)} \\
 \frac{}{\vdash \forall x. (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x. P(x)} \text{ (}\forall\text{)}
 \end{array}$$

**Exercice 4.** \* Règles admissibles en calcul des séquents

Pour montrer que la règle d'affaiblissement

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ (W)}$$

est admissible, on peut prouver par induction sur la profondeur de l'arbre de dérivation que  $\vdash \Gamma$  implique  $\vdash \Gamma, \Delta$  pour tout multi-ensemble  $\Delta$ .

- (a) Considérez le cas particulier où  $\Gamma = \{P(x), \forall x.(P(x) \vee \neg P(x))\}$  et  $\Delta = \{P(y) \wedge \neg P(y)\}$ . Donnez une preuve pour le séquent  $\vdash \Gamma$  et obtenez ensuite une preuve pour  $\vdash \Gamma, \Delta$ .
- (b) Dans le cas général, on fait une distinction de cas selon la dernière règle employée dans la dérivation  $\pi$  de  $\vdash \Gamma$ . Donnez tous les détails de la preuve pour les cas  $(\exists)$  et  $(\forall)$ .

**Exercice 5.** \* Examen 2019

On souhaite vérifier que l'inférence est valide dans le syllogisme « Tous les humains sont mortels, or SOCRATE est humain, donc SOCRATE est mortel ».

On considère pour cela la signature du premier ordre définie par  $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{s^{(0)}\}$  et  $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{H^{(1)}, M^{(1)}\}$  où la constante  $s$  représente « SOCRATE », la relation unaire  $H$  représente « être humain » et la relation unaire  $M$  représente « être mortel ». On peut alors traduire « tous les humains sont mortels » par  $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$ , « SOCRATE est humain » par  $H(s)$ , et « SOCRATE est mortel » par  $M(s)$ .

Montrer que la formule  $\varphi_5$  ci-dessous est valide, en en fournissant une dérivation dans le calcul des séquents.

$$\varphi_5 \stackrel{\text{def}}{=} ((\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)) \Rightarrow M(s)$$