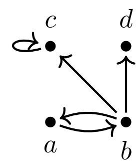
TD 7. Logique du premier ordre : sémantique, renommages et substitutions, formes normales

Exercice 1. Un graphe orienté vu comme interprétation

Considérons le graphe orienté suivant :



On peut voir ce graphe comme interprétation I d'une signature avec une relation binaire, E. Le domaine de I est $D_I = \{a, b, c, d\}$, et $E^I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (b, d)\}$.

Pour chacune des formules suivantes, (a) donner une valuation ρ telle que la formule est satisfaite par (I, ρ), ou montrer que la formule n'est pas satisfiable dans I ; et (b) montrer que I est un modèle de la formule, ou donner une valuation qui montre que I n'est pas un modèle de la formule.

1. $E(x, x)$
2. $E(x, y) \land E(y, x)$
3. $\exists y.(E(x, y) \land E(y, z))$
4. $\exists x.E(x, y)$
5. $\forall x.\neg E(x, y)$
6. $\exists y.E(x, y)$

Exercice 2. Équivalences logiques

1. Considérons deux formules φ et ψ telles que $x \notin \mathrm{fv}(\varphi)$. Montrer les équivalences logiques suivantes
   (a) $(\forall x.\psi) \land \varphi \Leftrightarrow \forall x.(\psi \land \varphi)$
   (b) $(\exists x.\psi) \land \varphi \Leftrightarrow \exists x.(\psi \land \varphi)$
2. Les formules $(\forall x.P(x)) \lor \neg P(x)$ et $\forall x.(P(x) \lor \neg P(x))$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Exercice 3. Substitutions et α-renommage

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables domaine et image de σ.

Rappelons la définition d'α-*renommage*. Considérons une formule $\varphi = \exists x.\psi$. Soit x' une variable qui n'est pas libre dans ψ et telle que la substitution $[x'/x]$ soit applicable à ψ. L'α-*renommage* $x \mapsto x'$ de φ est la formule $\exists x'.\psi[x'/x]$.

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}.$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x, y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α-renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

1. $R(x, y) \land \exists x.R(x, x)$

2. $\exists x.R(f(x), y)$
3. $\exists z.R(f(x), z)$
4. $\forall x \exists y.R(x, y)$

Exercice 4. Forme normale négative

Rappel. Une formule du premier ordre est en *forme normale négative* si elle respecte la syntaxe abstraite

(littéraux)	$\ell ::= \alpha \mid \neg\alpha$
(formules en forme normale négative)	$\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi$

où α est une formule atomique et $x \in X$. En d'autres termes, les négations ne peuvent apparaître que devant des formules atomiques.

Pour une formule φ, sa forme normale négative $\mathrm{nnf}(\varphi)$ est obtenue inductivement par

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha\ , & \mathrm{nnf}(\neg\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}$$

Mettre sous forme normale négative les formules suivantes :

1. $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$
2. $\neg\forall x.\exists y.\forall z.(\neg R(x, z) \vee B(y))$
3. $(\exists x.B(x) \wedge \neg R(x, y)) \Rightarrow \neg\forall y.R(y, y)$

Exercice 5. Forme prénexe

Rappel. Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\psi$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et ψ est sans quantificateur, c'est-à-dire ψ respecte la syntaxe abstraite

(formules sans quantificateur)	$\psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi\ .$

Pour chaque formule donnée dans l'Exercice 4, trouver une formule équivalente sous forme normale prénexe. N'oubliez pas d'utiliser l'α-renommage si nécessaire.