

## TD 9. Modélisation en logique du premier ordre

### Exercice 1. Problème du rendu de monnaie

Le *problème du rendu de monnaie* est le problème algorithmique suivant : étant donnée une liste  $v_1, \dots, v_k$  de valeurs de pièces et une somme  $S$ , trouver le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme  $S$ .

Dans cet exercice, nous modélisons ce problème comme un problème SMT, plus précisément, comme un problème de satisfiabilité modulo la théorie de  $(\mathbb{N}, +, <)$ .

Commençons par un exemple. Supposons que nous avons des pièces de 10, 20 et 50 centimes, et que nous voulons rendre une somme de 1,10 euro. Dans la notation ci-dessus :  $k = 3$ ,  $v_1 = 10$ ,  $v_2 = 20$ ,  $v_3 = 50$ , et  $S = 110$ .

- Trouver le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme  $S = 110$  donnée.
- Écrire une formule atomique qui exprime que la combinaison lineaire positive de  $x_1$  pièces de 10,  $x_2$  pièces de 20, et  $x_3$  pièces de 50 donne la somme  $S$ .
- Généraliser la formule trouvée dans la question précédente pour le cas d'une liste de valeurs quelconque, de longueur  $k$  quelconque.
- Écrire une formule atomique qui exprime que, si pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $x_i$  dénote le nombre de pièces de valeur  $v_i$  utilisé, nous avons utilisé exactement  $m$  pièces.
- Écrire une formule existentielle,  $\varphi(m)$  à une variable libre,  $m$ , qui exprime qu'il existe une manière de rendre la somme  $S$  en utilisant exactement  $m$  pièces.
- En utilisant la formule  $\varphi(m)$  de la question précédente, écrire une formule  $\psi(m)$  à une variable libre,  $m$ , qui exprime que  $m$  est le nombre minimal de pièces nécessaire pour atteindre exactement la somme  $S$ .

### Exercice 2. Nombres de RAMSEY

**Théorème 1 (RAMSEY, version finie).** *Pour tout entier  $c$  et toute suite d'entiers  $(n_1, n_2, \dots, n_c)$  il existe un entier  $m$  tel que pour toute coloration en  $c$  couleurs des arêtes du graphe complet  $K_m$ , il existe une couleur  $1 \leq i \leq c$  et une clique de  $K_m$  d'ordre  $n_i$  qui soit monochromatique de couleur  $i$ .*

On considère la signature  $L = (\emptyset, \{<, =, A, B_1, \dots, B_c\})$  où tous les symboles de relation sont binaires. L'interprétation escomptée est l'interprétation normale sur  $(\mathbb{N}, <)$  où les nombres naturels dénotent les sommets du graphe, la relation  $A(x, y)$  est vraie si les sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête, et, pour  $1 \leq i \leq c$ ,  $B_i(x, y)$  est vraie si les sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête, et cette arête porte la couleur  $n_i$ . Dans les questions suivantes, les formules sont des formules de la logique du premier ordre sur  $L$ .

- Écrire une formule à une variable libre  $m$  qui exprime le fait que le graphe ayant  $\{0, \dots, m - 1\}$  comme sommets est complet. On nomme  $C(m)$  cette formule.
- Écrire une formule à une variable libre  $m$  qui exprime le fait que le graphe ayant  $\{0, \dots, m - 1\}$  comme sommets est complet, et que toutes ses arêtes sont coloriées (et chaque arête l'est de manière unique). On nomme  $D(m)$  cette formule.
- Écrire une formule existentielle qui exprime le théorème de RAMSEY fini, si on fixe  $c = 2$ ,  $n_1 = 3$  et  $n_2 = 3$ .
- Trouver le plus petit entier  $m$  qui vérifie la formule du point précédent.
- Est-ce qu'il existe une formule permettant d'exprimer le théorème de RAMSEY fini ?

- (f) \* Est-ce qu'il existe une formule permettant d'exprimer le théorème de RAMSEY fini, si on fixe  $c = 2$  ?

**Exercice 3.** Invariants de boucle

On souhaite synthétiser un invariant de boucle comme expliqué dans la section 16.4 des notes de cours. On considère pour cela le fragment de programme suivant :

```
int i = 1, s = 0;
while (i < 6) {
    s = s + i;
    i = i + 1;
}
assert(s = 15)
```

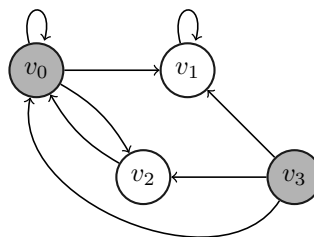
- (a) Donner l'ensemble  $Reach \subseteq \mathbb{Z}^2$  des configurations accessibles, c'est-à-dire des valeurs des variables  $i$  et  $s$  au cours de l'exécution du fragment de programme.
- (b) Donner l'ensemble  $Error \subseteq \mathbb{Z}^2$  des valeurs des variables  $i$  et  $s$  qui contredisent l'assertion.
- (c) On se place dans une signature  $(\{+^{(2)}, (i^{(0)})_{i \in \mathbb{N}}\}, \{<^{(2)}, =^{(2)}, Inv^{(2)}\})$  où les symboles de fonctions et de relation différents de  $Inv$  auront leur interprétation escomptée. Donnez les formules qui expriment le fait que  $Inv$  est un invariant inductif sûr du fragment de programme.
- (d) Est-ce que  $Inv^I = Reach$  est un modèle des formules du point précédent ? Proposer une autre interprétation qui soit un modèle.

**Exercice 4.** Examen 2019

On considère dans cet exercice la signature du premier ordre  $L \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \mathcal{P})$  où  $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{E^{(2)}, =^{(2)}, G^{(1)}\}$ . Soit l'interprétation  $I$  de domaine  $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  avec

$$\begin{aligned}
 E^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{(v_0, v_0), (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_1), (v_2, v_0), (v_3, v_0), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\}, \\
 =^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{(v_0, v_0), (v_1, v_1), (v_2, v_2), (v_3, v_3)\}, \\
 G^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{v_0, v_3\}.
 \end{aligned}$$

On peut voir  $I$  comme le graphe dirigé colorié ci-dessous, où  $\ll E \gg$  dénote la relation d'adjacence,  $\ll G \gg$  dénote les sommets gris et  $\ll = \gg$  est l'égalité.



- (a) Est-ce que  $I$  est un modèle de la formule  $\varphi_{4,a} \stackrel{\text{def}}{=} (E(x, y) \wedge E(y, z)) \Rightarrow E(x, z)$  ? Justifiez.
- (b) Est-ce que  $I$  est un modèle de la formule  $\varphi_{4,b} \stackrel{\text{def}}{=} G(x) \Leftrightarrow (\forall y . (E(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \neg G(y))$  ? Justifiez.
- (c) Écrivez une formule  $\varphi_{4,c}$  qui exprime le fait que tous les sommets non gris de  $I$  ont un degré sortant de 1. L'interprétation  $I$  est-elle un modèle de votre formule ? Justifiez.