Contrôle Continu 1

Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 26 octobre 2023. Le barème sur 20 points donné dans la marge est indicatif.

Automates à pile déterministes. Un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ est *déterministe* si, pour tout état $q \in Q$ et tout symbole de pile $z \in \Gamma$,

— soit il existe une transition spontanée $(q, z, \varepsilon, q', \gamma) \in \delta$ pour un certain état $q' \in Q$ et mot de pile $\gamma \in \Gamma^*$, et dans ce cas il s'agit de la seule transition applicable à q et z : $|\{(a, q'', \gamma') \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \Gamma^* \mid (q, z, a, q'', \gamma') \in \delta\}| = 1$;

— soit il n'existe pas de telle transition spontanée, et alors pour tout $a \in \Sigma$, il existe au plus une transition applicable à q et z lisant a : $|\{(q', \gamma) \in (Q \times \Gamma^* \mid (q, z, a, q', \gamma) \in \delta\}| \leq 1$.

Un langage algébrique L est *déterministe* s'il existe un automate à pile déterministe qui l'accepte par état acceptant, c'est-à-dire s'il existe $\mathcal{A}$ déterministe tel que $L = L(\mathcal{A})$.

Exercice 1. Exemples de langages déterministes

[2] (a) Montrer que le langage des palindromes marqués $L_{\text{pal}} \stackrel{\text{def}}{=} \{w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ est un langage algébrique déterministe sur $\{a, b, \$\}^*$ ($\cdot^R$ est l'opération de renversement des mots, par exemple $abaab^R = baaba$).

[3] (b) On peut généraliser cet exemple. Soient Σ et Δ deux alphabets finis ne contenant pas \$ et $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ un morphisme. Montrer que le langage $L_h \stackrel{\text{def}}{=} \{w\$(h(w))^R \mid w \in \Sigma^+\}$ est un langage algébrique déterministe.

[2] (c) Montrer qu'un langage reconnaissable est aussi algébrique déterministe.

Exercice 2. Langages déterministes sans préfixe

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *sans préfixe* si aucun préfixe strict d'un mot de L n'est aussi un mot de L, autrement dit si $L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$.

[3] (a) Soit L un langage algébrique. Montrer qu'il existe un automate à pile déterministe $\mathcal{A}$ qui accepte L par pile vide, autrement dit $L = N(\mathcal{A})$, si et seulement si L est déterministe et sans préfixe.

Exercice 3. Exemple de langage non déterministe

On souhaite montrer que le langage $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ n'est pas déterministe.

[1,5] (a) Montrer que L est un langage algébrique.

Pour montrer que L n'est pas déterministe, on va procéder par contradiction et montrer que si L était reconnu par un automate à pile déterministe $\mathcal{A}$ tel que $L = L(\mathcal{A})$, alors le langage $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ serait algébrique. Or ce dernier n'est pas un langage algébrique – un résultat classique que l'on admet pour cet exercice, et qui découle du lemme d'Ogden.

Supposons donc qu'il existe $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile déterministe tel que $L = L(\mathcal{A})$. Soit $g\colon \{a,b\}^* \to \{a,c\}^*$ le morphisme défini par $\underline{g}\colon a \mapsto a, b \mapsto c$. On construit un nouvel automate à pile $\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} (Q', \Gamma, \{a,b,c\}, \delta', q_0', z_0, F')$ qui va « simuler » l'exécution de deux copies de $\mathcal{A}$, l'une avant de passer par un état acceptant, et l'autre après :

$$Q' \stackrel{\text{def}}{=} Q \times \{0,1\}$$
$$q_0' \stackrel{\text{def}}{=} (q_0, 0)$$
$$F' \stackrel{\text{def}}{=} F \times \{1\}$$

(transitions 0-0) $\delta' \stackrel{\text{def}}{=} \{((q,0), z, d, (q',0), \gamma) \mid d \in \{a,b,\varepsilon\},\ q \notin F,\ \text{et } (q,z,d,q',\gamma) \in \delta\}$

(transitions 0-1) $\cup\ \{((q,0), z, g(d), (q',1), \gamma) \mid d \in \{b,\varepsilon\},\ q \in F,\ (q,z,d,q',\gamma) \in \delta\}$

(transitions 1-1) $\cup\ \{((q,1), z, g(d), (q',1), \gamma) \mid d \in \{b,\varepsilon\},\ (q,z,d,q',\gamma) \in \delta\}$.

(b) Soit $h\colon \{a,b,c\}^* \to \{a,b\}^*$ le morphisme défini par $\underline{h}\colon a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto b$.

[1] i. Montrer que, si $w \in L(\mathcal{A}')$, alors $h(w) \in L(\mathcal{A})$.

[1] ii. Montrer que, si $w \in L(\mathcal{A}')$, alors $w = w_1 w_2$ avec $w_1 \in L(\mathcal{A})$ et $w_2 \in \{c\}^*$.

[2,5] iii. En déduire que $L(\mathcal{A}') \subseteq \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cup L$.

[2,5] (c) Montrer que $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \subseteq L(\mathcal{A}')$.

[1,5] (d) En déduire que $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ est un langage algébrique, ce qui est une contradiction.