TD 1. Langages rationnels

Exercice 1. Clôture par opérations rationnelles et construction de Thompson

Dans cet exercice, on considère des automates finis potentiellement munis de transitions spontanées (ε-transitions). Un tel automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ est dit *standard* si $|I| = |F| = 1$ et $(Q \times \Sigma \times I) \cap \delta = (F \times \Sigma \times Q) \cap \delta = \emptyset$, autrement dit s'il a exactement un état initial, qui n'a aucune transition entrante, et un état final, qui n'a aucune transition sortante.

(a) Donner un automate standard $\mathcal{A}$ tel que

i. $L(\mathcal{A}) = \emptyset$,

ii. pour $a \in \Sigma$, $L(\mathcal{A}) = \{a\}$.

(b) Montrer que, pour $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux automates standards, on peut construire $\mathcal{A}$ un automate standard tel que

i. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$,

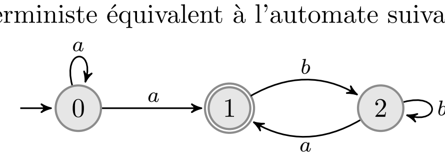
ii. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cdot L(\mathcal{A}_2)$,

iii. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1)^*$.

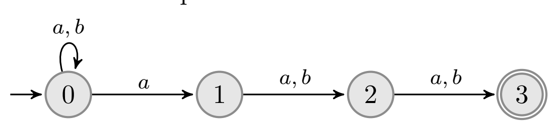
(c) En déduire un algorithme (dû à Thompson) qui, pour toute expression rationnelle E fournie en entrée, construit un automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L(E)$. Quelle est la taille de cet automate en fonction de la taille de E ?

Exercice 2. Déterminisation

(a) Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



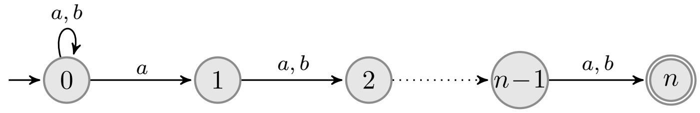
(b) Donner une automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



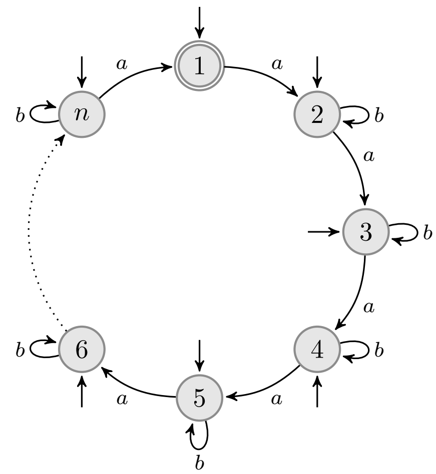
(c) Montrer que l'automate des parties déterministe obtenu à partir de l'automate suivant a 2^n états. On pourra utiliser l'ensemble

$$P-1 = \{i - 1 \mid i \neq 1 \in P\}$$

où P est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$.



(d) Quelle est la taille de l'automate des parties pour l'automate suivant ?



Exercice 3. Langage local, automate de Glushkov

(a) Une expression rationnelle E sur Σ est *linéaire* si chaque symbole de Σ apparaît au plus une fois dans E.

Montrer que tout langage rationnel sur Σ est le résultat de l'application d'un morphisme alphabétique $\Delta \to \Sigma$ au langage d'une expression rationnelle linéaire sur Δ.

(b) Soit L un langage sur Σ. On définit les ensembles

(1-préfixes)	$P(L) = \{a \in \Sigma \mid a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$
(1-suffixes)	$S(L) = \{a \in \Sigma \mid \Sigma^* a \cap L \neq \emptyset\}$
(2-facteurs)	$F(L) = \{u \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* u \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$
(2-non facteurs)	$N(L) = \Sigma^2 \setminus F(L)$

Soit E une expression rationnelle telle que $L(E) = L$. Donner un algorithme pour calculer $P(L)$, $S(L)$ et $F(L)$ à partir de E.

(c) Un langage L sur Σ est *local* si

$$L \setminus \{\varepsilon\} = (P(L)\Sigma^* \cap \Sigma^* S(L)) \setminus \Sigma^* N(L) \Sigma^* \ .$$

Un automate fini déterministe est *local* si, pour chaque symbole a de Σ, il y a au plus un état accessible par une transition sur a : $|\{q' \in Q \mid \exists q \in Q, (q, a, q') \in \delta\}| \leq 1$. Il est *standard* si son état initial n'a aucune transition entrante.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. L est un langage local.
2. L est reconnu par un automate local standard.
3. L est reconnu par un automate local.

(d) Les langages locaux sont clos par plusieurs opérations. Montrer que

i. si L est local, alors L^* est local.

ii. si L_1 et L_2 sont des langages locaux sur des aphabets disjoints, alors $L_1 \cup L_2$ et $L_1 \cdot L_2$ sont des langages locaux.

Montrer qu'une expression linéaire représente un langage local.

(e) En déduire un algorithme de contruction d'un automate équivalent à une expression rationnelle. Quelle est la taille de l'automate obtenu ?

(f) Appliquer cet algorithme à l'expression rationnelle $(ab + b)^* ba$.

(g) Soit $\Sigma_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un alphabet et $L = L((a_1 + \varepsilon)(a_2 + \varepsilon) \cdots (a_n + \varepsilon))$ l'ensemble des sous-mots du mot $a_1 a_2 \cdots a_n$. Donner une expression rationnelle pour L, et construire son automate de Glushkov.