TD 2. Langages rationnels, encore

Exercice 1. Critères de rationnalité

(a) Soit $L_{\text{copy}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Montrer que L_{copy} n'est pas rationnel.

(b) Soit L un langage quelconque sur Σ et $\#$ un symbole qui n'est pas dans Σ.

i. Montrer que le langage $L_\# \stackrel{\text{def}}{=} (\{\#^n \mid n > 0\} \cdot L) \cup \Sigma^*$ satisfait les conditions de la première version du lemme de l'étoile.

ii. Montrer à l'aide de propriétés de clôture que si L n'est pas rationnel, alors $L_\#$ n'est pas rationnel.

iii. Montrer que si L ne satisfait pas les conditions de la première version du lemme de l'étoile, alors $L_\#$ ne satisfait pas les conditions de la seconde version du lemme.

(c) Soit L un langage quelconque sur Σ et \$ un symbole qui n'est pas dans Σ. On définit

$$L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\$^+ a_1 \$^+ a_2 \$^+ \ldots \$^+ a_n \$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ a_i \in \Sigma, \text{ et } w = a_1 \cdots a_n \in L\}$$
$$L_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\$^+ v_1 \$^+ v_2 \$^+ \ldots \$^+ v_n \$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ v_i \in \Sigma^* \text{ et } \exists j\ |v_j| > 1\}$$
$$L_\$ \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \cup L_2\ .$$

i. Montrer que $L_\$$ satisfait les conditions de la seconde version du lemme de l'étoile.

ii. Montrer à l'aide de propriétés de clôture que si L n'est pas rationnel, alors $L_\$$ non plus.

iii. Montrer que si L ne satisfait pas les conditions de la troisième version du lemme de l'étoile, alors $L_\$$ ne les vérifie pas non plus.

Exercice 2. Algorithme de McNaughton et Yamada

Voici une construction très connue d'une expression rationnelle à partir d'un automate fini, qui permet de montrer la direction $\mathrm{Rec}(\Sigma^*) \subseteq \mathrm{Rat}(\Sigma^*)$ du théorème de Kleene.

Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ un automate fini. On ordonne totalement les états de Q, et on voit ce dernier comme l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ avec $n \stackrel{\text{def}}{=} |Q|$.

La construction cherche à calculer des expressions rationnelles $E^{(k)}_{p,q}$ dérivant les langages

$$(*)\quad L(E^{(k)}_{p,q}) = \{a_1 \cdots a_\ell \in \Sigma^\ell \mid \ell \in \mathbb{N}, \exists q_1, \ldots, q_{\ell-1} \in \{1, \ldots, k\}, p = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots q_{\ell-1} \xrightarrow{a_\ell} q_\ell = q\}$$

reconnus entre deux états p et q de Q sans passer par un état intermédiaire strictement supérieur à $k \in \mathbb{N}$.

(a) Supposons que l'on a calculé les expressions rationnelles $E^{(k)}_{p,q}$ satisfaisant $(*)$. Donner une expression rationnelle E telle que $L(E) = L(\mathcal{A})$.

(b) On va construire nos expressions rationnelles $E^{(k)}_{p,q}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

i. Cas de base $k = 0$: donner une expression $E^{(0)}_{p,q}$.

ii. Étape de récurrence : donner une expression $E^{(k+1)}_{p,q}$.

iii. Montrer que $|E^{(k)}_{p,q}| + 1 \leq 4^k \cdot 2|\Sigma|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p, q \in Q$. Quelle borne peut-on en déduire sur $|E|$ en fonction de n et $|\Sigma|$?

(c) On considère l'alphabet $\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ des paires sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour une paire (i, f) de Σ_n, on définit le langage

$$L_{i,f} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_m, a_{m+1}) \in \Sigma_n^m \mid m \geq 1, a_1 = i, a_{m+1} = f\}$$

l'ensemble des chemins de i à f dans le graphe complet défini par Σ_n.

i. Montrer que $L_{i,f}$ est reconnu par un automate fini de taille $O(n^2)$.

ii. Quelle est la taille de l'expression rationnelle que vous obtenez à partir de cet automate ?

Exercice 3. Algorithme de Brzozowski et McCluskey

Cet exercice propose une construction plus intuitive d'une expression rationnelle à partir d'un automate fini.

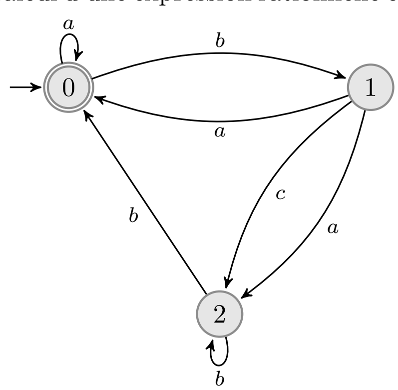
Un automate *généralisé* sur l'alphabet Σ utilise une relation de transition sur $Q \times 2^{\Sigma^*} \times Q$. Une exécution dans un tel automate reconnaît la concaténation des langages des transitions, et le langage reconnu par l'automate est l'union de ces exécutions.

(a) Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate généralisé, alors on peut construire un automate généralisé $\mathcal{B}$ équivalent tel qu'il existe au plus une transition entre deux états de $\mathcal{B}$.

(b) Montrer que si $\mathcal{A} = \langle Q \uplus \{q, i, f\}, \delta, \{i\}, \{f\} \rangle$ est un automate généralisé sur Σ, alors il existe un automate généralisé équivalent avec pour ensemble d'états $Q \uplus \{i, f\}$, c'est-à-dire que l'on peut éliminer q de l'ensemble des états de $\mathcal{A}$.

(c) En déduire que si L est reconnu par un automate généralisé $\mathcal{A}$, alors L appartient à la clôture rationnelle des étiquettes des transitions de $\mathcal{A}$.

(d) Appliquer cette construction au calcul d'une expression rationnelle équivalente à l'automate suivant :



Exercice 4. Clôture par substitution rationnelle inverse

Montrer que si $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable et σ est une substitution de Δ^* dans les parties reconnaissables de Σ^* (définie par une fonction $\underline{\sigma} \colon \Sigma \to \mathrm{Rat}(\Delta^*)$), alors $\sigma^{-1}(L)$ est reconnaissable sur Δ^*.