TD 4. Automates à pile

Exercice 1. Conditions d'acceptation

Pour un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$, on a vu qu'il existait deux langages d'acceptation par *état final* et *pile vide*, respectivement

$$L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid \exists q \in F, \exists \gamma \in \Gamma^* \,.\, (q_0, z_0) \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} (q, \gamma)\}\ ,$$
$$N(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid \exists q \in Q \,.\, (q_0, z_0) \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon)\}\ .$$

(a) Montrer que ces deux modes d'acceptation sont « interchangeables » dans le sens suivant : si $\mathcal{A}$ est un automate à pile,
   i. il existe $\mathcal{A}_1$ tel que $L(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A}_1)$ et
   ii. il existe $\mathcal{A}_2$ tel que $N(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_2)$.

(b) On souhaite généraliser ces définitions. Soit $R \subseteq (Q \uplus \Gamma)^*$ un langage rationnel ; on définit le langage d'acceptation par *configuration dans R*

$$C_R(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid \exists q \in Q, \exists \gamma \in \Gamma^* \,.\, (q_0, z_0) \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} (q, \gamma) \text{ et } \gamma q \in R\}\ .$$

Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate à pile,
   i. il existe $R_L \in \mathrm{Rat}((Q \uplus \Gamma)^*)$ tel que $L(\mathcal{A}) = C_{R_L}(\mathcal{A})$,
   ii. il existe $R_N \in \mathrm{Rat}((Q \uplus \Gamma)^*)$ tel que $N(\mathcal{A}) = C_{R_N}(\mathcal{A})$, et
   iii. pour tout $R \in \mathrm{Rat}((Q \uplus \Gamma)^*)$, il existe $\mathcal{A}_R$ tel que $L(\mathcal{A}_R) = N(\mathcal{A}_R) = C_R(\mathcal{A})$.

Exercice 2. Exemples d'automates à pile

Donner un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ pour chacun des trois langages suivants sur $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ et justifier sa correction :

$$L_{\text{pal}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$$
$$L_{\overline{\text{pal}}} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^* \setminus L_{\text{pal}}$$
$$L_{\overline{\text{copie}}} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^* \setminus L_{\text{copie}} \qquad \text{où } L_{\text{copie}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

Exercice 3. Formes particulières

(a) Soit $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent avec une relation de transition $\delta' \subseteq Q' \times \Gamma' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times \Gamma'^{\leq 2}$.

(b) Soit $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent où toutes les transitions (q, z, a, q', γ) sont de la forme

empilage de z: si $\gamma = zz'$ pour $z, z' \in \Gamma$, et dans ce cas on a aussi une transition $(q, z'', a, q', z''z')$ pour tout $z'' \in \Gamma$, ou

dépilage de z: si $\gamma = \varepsilon$ et $z \neq z_0$.

On notera respectivement ces transitions comme $q \xrightarrow{a,z} q'$ et $q \xrightarrow{a,\bar{z}} q'$.

Exercice 4. Langage de pile

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automate à pile. On définit son *langage de pile* comme l'ensemble de mots dans $\Gamma^* \cdot Q$

$$P(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma q \mid \exists w \in \Sigma^* \,.\, (q_0, z_0) \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} (q, \gamma)\}\ .$$

Montrer que $P(\mathcal{A}) \in \mathrm{Rec}((Q \uplus \Gamma)^*)$ est reconnu par un automate fini qui peut être construit en temps $O(|\mathcal{A}|^3)$.