

## Devoir Maison 1

*Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 12 novembre 2020. Le barème sur 15 points donné dans la marge est indicatif.*

### Exercice 1. Algorithme DPLL

Considérons la formule propositionnelle  $\varphi_1$  ci-dessous.

$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (S \Rightarrow ((Q \vee R \vee P) \wedge (Q \Rightarrow R))) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow (R \Rightarrow Q)) \wedge (S \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)) \wedge (P \Rightarrow R).$$

- [1,5] (a) Mettre  $\varphi_1$  sous forme normale négative : calculer  $\text{nnf}(\varphi_1)$ .
- [0,5] (b) Mettre  $\text{nnf}(\varphi_1)$  sous forme clausale.
- [2] (c) Appliquer l'algorithme DPLL à la formule obtenue en (b). Plus précisément, dessiner un arbre de recherche DPLL comme vu en cours (c.f. figures 15 à 18 des notes de cours).
- [0,5] (d) Dire si la formule  $\varphi_1$  est satisfiable, et si oui, fournir un modèle.

### Exercice 2. Calcul des séquents propositionnel

Considérons la formule propositionnelle  $\varphi_2$  ci-dessous.

$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (P \wedge \neg Q) \Rightarrow ((\neg Q \Rightarrow (Q \wedge \neg R)) \Rightarrow Q).$$

- [1] (a) Mettre  $\varphi_2$  sous forme normale négative : calculer  $\text{nnf}(\varphi_2)$ .
- [1,5] (b) Faire une recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel vu en cours sur la formule  $\text{nnf}(\varphi_2)$  obtenue en (b).
- [0,5] (c) Dire si la formule  $\varphi_2$  est valide, et si non, fournir un contre-modèle.
- [1,5 (bonus)] (d) Utiliser un raisonnement à base d'équivalences logiques et le fait que la loi de PEIRCE est valide pour arriver à la même conclusion. *Ne pas perdre de temps sur cette question bonus !*

### Exercice 3. Modélisation en logique propositionnelle

Le problème qui nous intéresse est le problème du graphe hamiltonien. L'entrée du problème est un graphe fini non orienté simple  $G = (V, E)$  comme celui de gauche dans la figure 1, où  $V$  est l'ensemble de sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes.

Un graphe est dit *hamiltonien* s'il existe un *cycle hamiltonien* dans le graphe, c'est-à-dire un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Rappelons que, comme vu en cours de mathématiques discrètes, un *cycle* est une séquence  $(v_1, v'_1), (v_2, v'_2), \dots, (v_k, v'_k)$  de paires de sommets telles que  $\{v_i, v'_i\} \in E$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  et

1. les sommets sont consécutifs, c'est-à-dire  $v'_i = v_{i+1}$  pour tout  $1 \leq i < k$ , et
2. les deux sommets extrémités sont identiques, c'est-à-dire  $v'_k = v_1$ .

Par exemple, un tel cycle hamiltonien  $(0, 1), (1, 2), (2, 9), (9, 10), (10, 17), (17, 18), (18, 19), (19, 15), (15, 16), (16, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 5), (5, 14), (14, 13), (13, 12), (12, 11), (11, 3), (3, 4), (4, 0)$  est indiqué en rouge dans le graphe de droite de la figure 1.

Le but de l'exercice est d'écrire une formule propositionnelle  $\varphi_3 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{3,\geq 1} \wedge \varphi_{3,\leq 1} \wedge \varphi_{3,C} \wedge \varphi_{3,H}$  qui dépend du graphe d'entrée  $G = (V, E)$ , et qui est satisfiable si et seulement si le graphe est hamiltonien.

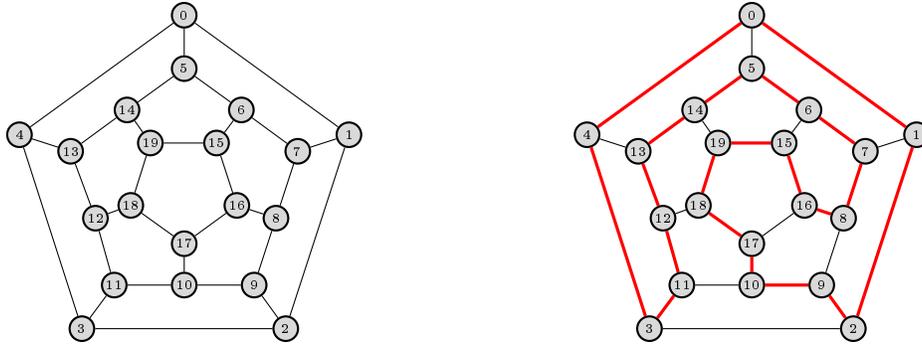


FIGURE 1 – Un graphe hamiltonien.

- [0,5] (a) On définit  $k$  comme le nombre de paires  $(v_i, v'_i)$  qui peuvent apparaître dans un cycle hamiltonien. Pour simplifier les notations par la suite, on définit  $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \in E\}$  comme l'ensemble des « orientations » d'arêtes de  $E$ ; un cycle est alors une séquence d'éléments de  $\vec{E}$  qui satisfait les conditions 1 et 2 données plus haut.  
On va travailler avec les propositions  $P_{i,(v,v')}$  où  $1 \leq i \leq k$  et  $(v, v') \in \vec{E}$ . Que vaut  $k$  en fonction du graphe  $G = (V, E)$ ?
- [1] (b) Écrire une formule propositionnelle  $\varphi_{3,\geq 1}$  qui impose que, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $P_{i,(v,v')}$  soit vraie pour au moins une paire  $(v, v') \in \vec{E}$ .
- [1] (c) Écrire une formule propositionnelle  $\varphi_{3,\leq 1}$  qui impose que, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $P_{i,(v,v')}$  soit vraie pour au plus une paire  $(v, v') \in \vec{E}$ .
- [2] (d) On sait maintenant que, si  $I$  est une interprétation qui satisfait  $\varphi_{3,\leq 1} \wedge \varphi_{3,\geq 1}$ , alors elle définit une séquence  $C_I \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, v'_1), (v_2, v'_2), \dots, (v_k, v'_k)$  de paires de sommets où, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $(v_i, v'_i)$  est l'unique paire de  $\vec{E}$  telle que  $P_{i,(v_i,v'_i)}^I = 1$ .  
Écrire une formule propositionnelle  $\varphi_{3,C}$  qui impose que  $C_I$  soit un cycle : les sommets doivent être consécutifs (condition 1) et les sommets extrémités doivent être identiques (condition 2).
- [2] (e) Écrire une formule propositionnelle  $\varphi_{3,H}$  qui impose que  $C_I$  passe exactement une fois par chaque sommet.