

## TD 1. Logique propositionnelle, équivalence, et conséquence

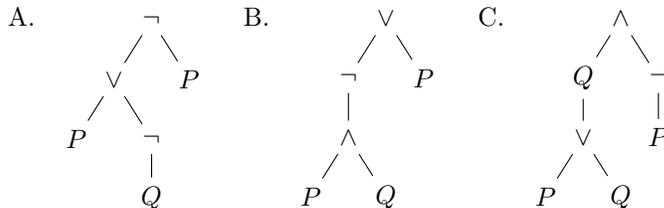
Rappelons que l'on se munit d'un ensemble dénombrable  $\mathcal{P}_0$  de propositions, et que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des formules propositionnelles est défini par la syntaxe abstraite

$$\varphi ::= P \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$$

où  $P \in \mathcal{P}_0$ . La notation  $\phi \Rightarrow \psi$  est une abréviation de  $\neg\phi \vee \psi$ , et  $\phi \Leftrightarrow \psi$  est une abréviation de  $(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$ . Dans tout ce qui suit,  $P, Q, R$  dénotent des éléments de  $\mathcal{P}_0$ , et  $\varphi, \psi$  des éléments de  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 1.** Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il représente une formule propositionnelle. Justifier.



**Exercice 2.** Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

- A.  $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$     B.  $R \wedge \neg(P \vee Q \wedge \neg R)$

**Exercice 3.** Pièges des langues naturelles

Formaliser les énoncés suivants (écrits en langue naturelle) en logique propositionnelle. Notez qu'il y a parfois plusieurs réponses possibles, en fonction de votre interprétation de l'énoncé.

- (a) « Le matin, il boit un café serré avec une tartine, ou parfois un thé. »
- (b) « Si Paris est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »
- (c) « Si Rome est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »
- (d) « Si la Terre n'est pas ronde, je veux bien manger mon chapeau. »

**Rappel.** Une formule  $\varphi$  est *valide* si toute interprétation satisfait  $\varphi$ , et *satisfiable* s'il existe une interprétation qui satisfait  $\varphi$ .

**Exercice 4.** Validité et satisfiabilité

Pour chacune des formules propositionnelles  $\varphi$  suivantes, dire si la formule est valide et/ou satisfiable, et le cas échéant, donner une interprétation  $I$  telle que  $\llbracket \varphi \rrbracket^I = 1$ .

- A.  $Q \vee \neg Q$
- B.  $\neg(P \wedge \neg Q)$
- C.  $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

**Rappel.** Une formule  $\psi$  est une *conséquence* de  $\varphi$  si toute interprétation qui satisfait  $\varphi$  satisfait aussi  $\psi$ . On le note  $\varphi \models \psi$ . Pour des formules de la logique propositionnelle,  $\varphi \models \psi$  si pour chaque ligne dans la table de vérité de  $\varphi$  qui contient la valeur **1** dans la colonne  $\varphi$ , la ligne correspondante dans la table pour  $\psi$  contient la valeur **1** dans la colonne  $\psi$ .

Deux formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont *équivalentes* si  $\varphi \models \psi$  et  $\psi \models \varphi$ . Pour des formules de la logique propositionnelle, cela veut dire que exactement les mêmes lignes contiennent la valeur **1** dans la colonne de  $\varphi$  que dans la colonne de  $\psi$ .

**Exercice 5.** Équivalences et conséquences logiques

Pour chaque couple de formules  $\varphi, \psi$  dans la liste suivante, écrire leur tables de vérité, et dire lequel des énoncés suivants est vrai :

- A. les formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont équivalentes,
  - B.  $\varphi \models \psi$  et  $\psi \not\models \varphi$ ,
  - C.  $\varphi \not\models \psi$  et  $\psi \models \varphi$ ,
  - D.  $\varphi \not\models \psi$  et  $\psi \not\models \varphi$ .
1.  $P \Rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$
  2.  $P \wedge (\neg Q \vee R), (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$
  3.  $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow (Q \vee R)$

**Exercice 6.** Combinaisons de formules valides et satisfiables

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formules propositionnelles.

- (a) Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  sont valides si et seulement si la formule  $\varphi \wedge \psi$  est valide.
- (b) Si  $\varphi \vee \psi$  est valide, est-ce qu'on peut en déduire que  $\varphi$  est valide ou  $\psi$  est valide? Montrez ou donnez un contre-exemple.
- (c) Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont satisfiables, que peut-on dire de  $\varphi \vee \psi$  et de  $\varphi \wedge \psi$ ?

**Exercice 7.** Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor »  $\downarrow$  à deux arguments définie par  $0 \downarrow 0 = 1$  et  $0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 1 \downarrow 1 = 0$ . On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des formules propositionnelles.

- (a) Exprimer  $\varphi \downarrow \psi$  de manière équivalente en utilisant uniquement les connecteurs  $\neg$  et  $\vee$ .
- (b) Exprimer  $\neg\varphi$  de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur  $\downarrow$ .
- (c) Exprimer  $\varphi \vee \psi$  de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur  $\downarrow$ .