

TD 2. Substitutions et formes normales dans la logique propositionnelle

Rappel : Si I est une interprétation, et τ est une substitution propositionnelle, alors $I\tau$ est l'interprétation qui associe à une proposition P la valeur $\llbracket \tau(P) \rrbracket^I$. Le *lemme de substitution propositionnelle* garantit que pour toute formule ϕ , $\llbracket \phi\tau \rrbracket^I = \llbracket \phi \rrbracket^{I\tau}$.

Exercice 1. Engendrer des équivalences par substitution

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles équivalentes, et soit τ une substitution propositionnelle.

- (a) Montrer que les formules $\varphi\tau$ et $\psi\tau$ sont équivalentes.
- (b) En déduire que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles, les formules $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ sont équivalentes.

Exercice 2. Encore sur les substitutions

Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$ et l'interprétation $I = [1/P, 0/Q, 0/R, 0/S]$.

- (a) Calculer les formules $\varphi\tau_1$ et $\varphi\tau_2$.
- (b) Calculer les interprétations $I\tau_1$ et $I\tau_2$.
- (c) Vérifier que $\llbracket \varphi\tau_1 \rrbracket^I = \llbracket \varphi \rrbracket^{I\tau_1}$ et que $\llbracket \varphi\tau_2 \rrbracket^I = \llbracket \varphi \rrbracket^{I\tau_2}$.
- (d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

Rappel : On rappelle que la mise en forme normale négative peut se faire avec l'algorithme suivant, défini par induction structurelle sur la syntaxe des formules :

$$\begin{aligned} \text{nnf}(P) &\stackrel{\text{def}}{=} P, & \text{nnf}(\neg P) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P, \\ \text{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \vee \text{nnf}(\psi), & \text{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \wedge \text{nnf}(\neg\psi), \\ \text{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \wedge \text{nnf}(\psi), & \text{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \vee \text{nnf}(\neg\psi), \\ & & \text{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi). \end{aligned}$$

Une formule sous forme normale négative s'écrit donc dans la syntaxe ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{(littéraux)} & \quad \ell ::= P \mid \neg P \\ \text{(formules)} & \quad \varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \end{aligned}$$

À partir d'une formule sous cette forme, les deux algorithmes suivant permettent d'obtenir une formule équivalente sous forme normale conjonctive (pour cnf) et sous forme normale disjonctive (pour dnf) :

$$\begin{aligned} \text{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) &= \text{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \text{cnf}(\varphi \vee \psi'). \\ \text{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) &= \text{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \text{dnf}(\varphi \wedge \psi'). \end{aligned}$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

Exercice 3. Forme normale négative

- (a) Calculer $\text{nmf}(\neg(P \vee \neg(Q \wedge \neg R)))$
- (b) Calculer $\text{nmf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$.

Exercice 4. Formes clausales

- (a) Calculer $\text{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique ?
- (b) Donner un algorithme pour vérifier si une formule cnf est valide.
- (c) Calculer $\text{dnf}((P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge Q)$.
- (d) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 5. Tables de vérité et formes normales disjonctives complètes

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

- (a) Écrire la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule dnf ψ telle que ψ soit équivalente à φ .
- (b) Calculer $\text{dnf}(\text{nmf}(\varphi))$ et vérifier que cette formule est équivalente à φ .

Rappel : On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ , on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \text{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2, \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2. \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\varphi} \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule non littérale de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.

Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ .

Exercice 6. Forme clausale équi-satisfiable

- (a) Calculer la forme normale négative de la *loi de PEIRCE* $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.
- (b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.
- (c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.