

## TD 6. Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique

Soit  $X$  un ensemble infini dénombrable de symboles de variables. Les formules de la logique du premier ordre sur une signature  $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  sont définies par la syntaxe abstraite

(termes)	$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_m)$
(formules atomiques)	$\alpha ::= R(t_1, \dots, t_m)$
(formules)	$\varphi ::= \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\varphi$

où  $x \in X$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{F}_m$  et  $R \in \mathcal{P}_m$ . Pour un symbole de fonction  $f$  on note  $f^{(m)}$  quand  $f$  est d'arité  $m$ , c'est-à-dire quand  $f \in \mathcal{F}_m$ . De même, on écrit  $R^{(m)}$  pour un symbole de relation  $R$  d'arité  $m$ .

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on étend cette syntaxe avec les opérateurs  $\wedge, \neg, \Rightarrow, \top, \perp$ . Le quantificateur universel peut être défini comme  $\forall x.\varphi = \neg\exists x.\neg\varphi$ . (Quelque chose est toujours vrai s'il n'existe pas de contre-exemple.)

Dans les exercices 1, 2 et 4 ci-dessous, on considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{(0)}, m^{(1)}, p^{(1)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{B^{(1)}, G^{(2)}\}.$$

Soient  $x, y, z$  des symboles de variables dans  $X$ .

### Exercice 1. Modélisation : français vers la logique du premier ordre

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$B(x)$	« $x$ a les yeux bleus »
$G(x, y)$	« $x$ est plus grand que $y$ »

et les symboles de fonction suivants

$m(x)$	dénote la mère de $x$
$p(x)$	dénote le père de $x$
$a$	dénote Anne

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre.

- La mère d'Anne a les yeux bleus.
- Anne est plus grande que sa grand-mère paternelle, mais plus petite que sa grand-mère maternelle.
- Tous ceux dont les deux parents ont les yeux bleus ont aussi les yeux bleus.
- La mère et le père d'Anne ont les yeux bleus, mais Anne ne les a pas.
- Personne n'est plus grand que le père d'Anne.
- Il y a des gens qui ne sont pas plus grands que leur père.

### Exercice 2. Formules de la logique du premier ordre

- Pour chacune des expressions suivantes, précisez si elle est un terme bien formé, une formule atomique ou une formule dans la logique du premier ordre sur  $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$  la signature de l'exercice précédent.

1. $m(a)$	7. $G(p(z))$	13. $\exists x.(G(x, m(x)) \wedge p(x))$
2. $G(a, x)$	8. $m(G(x, y))$	14. $\neg\exists x.(G(x, m(x)) \wedge G(x, p(x)))$
3. $m(p(x))$	9. $G(x, y \vee m(a))$	15. $\exists y.G(x, m(a)) \vee G(x, y)$
4. $p(x)$	10. $G(x, G(y, z))$	16. $\exists x.\forall y.G(x, y)$
5. $m(x, a)$	11. $m(x) \vee p(y)$	17. $\forall x.(G(y, x) \Rightarrow \exists y.G(z, y))$
6. $G(m(x), a)$	12. $(\exists x.m(x)) \vee p(x)$	18. $\exists y.m(G(x, a)) \vee G(x, y)$

- (b) Pour chacune des formules bien formées ci-dessus, dessinez l'arbre syntaxique correspondant et précisez quelles sont les variables liées et libres.

**Exercice 3.** Interprétation, satisfiabilité

Soient  $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{zero^{(0)}\}$  et  $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$ . On considère une interprétation  $I$  avec domaine  $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$  et on interprète le symbole de relation  $<$  comme l'ordre habituel sur les nombres naturels, le symbole de relation  $=$  comme l'égalité et le symbole de fonction  $zero$  comme  $zero^I \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .

On considère la valuation  $\rho$  donnée par  $\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1$  et  $\rho(y) \stackrel{\text{def}}{=} 3$ .

- (a) Pour chacune des formules suivantes, déterminer si  $(I, \rho)$  la satisfait. Pour lesquelles l'interprétation  $I$  est-elle un modèle ?
1.  $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.(z < x)$
  2.  $\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\exists y.(x < y)$
  3.  $\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \exists y.\forall x.((x < y) \vee (x = y))$
  4.  $\varphi_3 \stackrel{\text{def}}{=} (x < y) \wedge \neg\exists z.((x < z) \wedge (z < y))$
- (b) Pour quelles valuations  $\rho'$  a-t-on  $I, \rho' \models \varphi_3$  ?
- (c) Trouvez une autre interprétation  $I'$  avec un domaine infini qui satisfait  $\varphi_2$ , mais pas  $\varphi_1$ . Trouvez une interprétation  $I''$  qui satisfait  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Le symbole  $=$  doit être interprété comme la relation d'égalité dans  $I'$  et  $I''$ .

**Exercice 4.** Satisfiabilité, validité, modèle

Pour chacune des formules suivantes déterminez si elles sont satisfiables, si elles ont un modèle, si elles sont valides ou non satisfiables.

1.  $\forall x.(B(x) \vee \neg B(x))$
2.  $\forall x.(B(x) \Rightarrow B(z))$
3.  $\forall x.\forall y.(B(x) \Leftrightarrow \neg B(y))$
4.  $G(x, x) \Rightarrow \exists y. G(x, y)$
5.  $(\exists y.G(x, y)) \Rightarrow G(x, x)$
6.  $\neg B(y) \wedge (\exists y. B(y))$
7.  $\exists x.\forall y. ((B(x) \vee B(y)) \Rightarrow B(y))$

Donnez un exemple et un contre-exemple pour les formules qui sont satisfiables mais n'ont pas de modèle ainsi que pour celles qui ont un modèle mais ne sont pas valides. Donnez une preuve pour les formules valides ou non satisfiables.