

## TD 8. Logique du premier ordre : théories logiques

**Exercice 1.** Axiomes de l'égalité et congruences

Comme vu dans les exemples 15.2 et 15.3 des notes de cours, pour une signature  $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$  telle que  $=^{(2)} \in \mathcal{P}$ , la théorie de l'égalité  $\text{Th}(A_{\text{eq}})$  est la théorie définie par l'ensemble d'axiomes  $A_{\text{eq}}$  contenant

- (réflexivité de =)  $\forall x. \quad x = x$
- (symétrie de =)  $\forall x \forall y. \quad x = y \Rightarrow y = x$
- (transitivité de =)  $\forall x \forall y \forall z. \quad (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$

Si  $I \models A_{\text{eq}}$ , alors on appelle  $=^I$  une *équivalence*. L'axiomatisation  $A_{\text{cgr}}(L)$  ajoute aux trois axiomes de  $A_{\text{eq}}$ , pour tout symbole de fonction  $f$  d'arité  $n$  dans  $\mathcal{F}$ ,

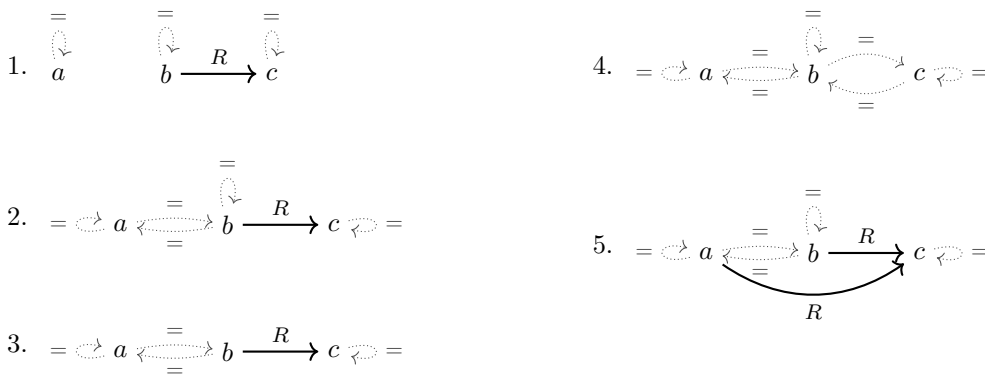
( $f$ -congruence)  $\forall x_1 \dots \forall x_n. \forall y_1 \dots \forall y_n. (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$

et pour tout symbole de relation  $R$  (différent de =) d'arité  $n$  dans  $\mathcal{P}$

( $R$ -congruence)  $\forall x_1 \dots \forall x_n. \forall y_1 \dots \forall y_n. (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$

Si  $I \models A_{\text{cgr}}(L)$ , alors on appelle  $=^I$  une *congruence*.

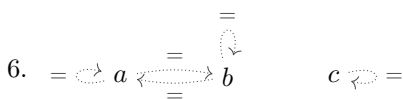
- (a) On pose  $\mathcal{F} = \emptyset$  et  $\mathcal{P} = \{=^{(2)}, R^{(2)}\}$ . Pour chacune des interprétations ci-dessous, dire si la relation  $=^I$  (indiquée en pointillés) est une équivalence et si elle est une congruence ; préciser quels axiomes ne sont pas satisfaits dans les cas négatifs.



- (b) Même question pour l'interprétation ci-dessous mais en posant cette fois-ci  $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(2)}\}$  :

$$f^I(a, a) = f^I(a, b) = f^I(b, a) = f^I(b, b) = f^I(c, c) = c,$$

$$f^I(a, c) = f^I(c, a) = a, \quad f^I(b, c) = f^I(c, b) = b.$$



- (c) Dans les cas des questions précédentes où la relation  $=^I$  était une congruence, donner l'interprétation quotient  $I / =^I$ .

- (d) Montrer que  $\text{Th}(A'_{\text{eq}}) = \text{Th}(A_{\text{eq}})$  où  $A'_{\text{eq}}$  contient l'axiome de réflexivité de  $=$  ainsi que l'axiome suivant :

$$\text{(axiome †)} \quad \forall x \forall y \forall z. \quad (x = y \wedge x = z) \Rightarrow y = z$$

**Exercice 2.** Axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une *k-clique* d'un graphe est un sous-ensemble  $C$  de sommets de cardinalité  $k$  tel que chaque sommet de  $C$  est adjacent à chaque autre sommet de  $C$ , c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.

Soit la signature  $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$  et  $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$ . Trouver une axiomatisation  $A_{k\text{-clique}}$ , telle que, pour toute interprétation normale  $I$ ,  $I \models A_{k\text{-clique}}$  si et seulement si  $(D_I, R^I)$  est un graphe qui contient une  $k$ -clique. (On rappelle qu'une interprétation  $I$  est normale si  $=^I$  est la relation d'égalité sur  $D_I$ .)

**Exercice 3.** Théories axiomatiques triviales

- (a) Soit  $A \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ . Montrer que  $\varphi \in \text{Th}(A)$  si et seulement si  $\varphi$  est une formule close valide.
- (b) Soit  $A$  un ensemble de formules closes *valides*. Montrer que  $\varphi \in \text{Th}(A)$  si et seulement si  $\varphi$  est une formule close valide.
- (c) Soit  $\varphi$  une formule close. Montrer que  $\psi \in \text{Th}(\{\varphi\})$  si et seulement si  $\varphi \Rightarrow \psi$  est une formule close valide.

**Exercice 4.** \* Examen 2019

On se place dans la théorie  $\text{Th}(A_{\text{ols}})$  des ordres linéaires stricts de l'exemple 15.6 des notes de cours. Montrer que la formule  $\varphi_4$  donnée ci-dessous appartient à cette théorie :

$$\varphi_4 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y. (\neg(y < x) \Rightarrow \forall z. (x < z \vee x = z))$$