TD 9. Théories logiques : décidabilité

Exercice 1. Élimination des quantificateurs dans $\mathrm{Th}(A_{oldns})$.

La théorie des ordres linéaires, denses, non bornés et stricts sur le langage $L = (\emptyset, \{<^{(2)}, =^{(2)}\})$ est axiomatisée par $A_{cgr(L)}$ plus les cinq axiomes suivants :

$\forall x.\neg(x < x)$	(irréflexivité de $<$)
$\forall x \forall y \forall z.(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z)$	(transitivité de $<$)
$\forall x \forall y. x < y \vee x = y \vee y < x$	(totalité de $<$)
$\forall x \forall y \exists z.(x < y) \Rightarrow (x < z \wedge z < y)$	(densité de $<$)
$\forall x \exists y \exists z. y < x \wedge x < z$	($<$ est non borné)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n . x_1 < x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} < x_n$$

Utiliser la technique d'élimination des quantificateurs pour décider si $\varphi_n \in \mathrm{Th}(A_{oldns})$.

Exercice 2. Élimination des quantificateurs dans l'arithmétique linéaire rationnelle.

La théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, sur le langage $(\{1^{(0)}, (q\cdot^{(1)})_{q\in\mathbb{Q}}, +^{(2)}\}, \{<^{(2)}, =^{(2)}\})$ est la théorie de la structure $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ (noter que l'interprétation est normale).

Pour obtenir une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle à un formule φ donnée, nous pouvons exécuter l'algorithme suivant, similaire à ce qui a été vu dans la section 15.2.3 des notes de cours :

(1) Mettre la formule φ sous forme prénexe.

(2) Remplacer chaque quantificateur $\forall$ par $\neg\exists\neg$, et faire entrer la deuxième négation.

(3) Isoler la variable liée par le quantificateur le plus intérieur, et éliminer ce quantificateur.

(4) Procéder avec (3) jusqu'à ce que tous les quantificateurs $\exists$ soient éliminés.

(5) Mettre le résultat en forme de combinaison positive de formules atomiques.

Rappellons aussi que, modulo la théorie de l'arithmétique lineaire rationnelle, on a les équivalences suivantes :

$$\neg(s < t) \Leftrightarrow (s = t \vee t < s)$$
$$\exists x(t < x \wedge x < t') \Leftrightarrow t < t'$$

Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, c'est-à-dire, la théorie de $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$.

(a) $\exists x.(3 < 2x \wedge 4x < y)$

(b) $\exists x.\neg(2x < 3x)$

(c) $\forall x.((\exists y.(y < x \wedge 5 < y)) \Rightarrow z < 2x)$