TD 11. Calcul des séquents pour la logique du premier ordre

Rappel : Voici les règles du calcul des séquents monolatère, où les substitutions doivent être *applicables*.

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \ell, \overline{\ell}}\ (\mathsf{ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \overline{\varphi}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\mathsf{cut})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi}\ (\forall)\ \text{où } y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x.\varphi}{\vdash \Gamma, \exists x.\varphi}\ (\exists)\ \text{où } t \in T(\mathcal{F}, X)$$

Exercice 1. Recherche de preuves en calcul des séquents

Considérons la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{(0)}, f^{(1)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{P^{(1)}, R^{(2)}\}\,.$$

Pour chacune des formules suivantes, après l'avoir mise en forme normale négative, donner une preuve en calcul des séquents :

(a) $\neg R(x, y) \vee \exists z.R(x, z)$

(b) $(P(x) \wedge P(y)) \vee \exists x.\neg P(x)$

(c) $\exists x.P(f(x)) \Rightarrow P(x)$

(d) $\big(\forall x.P(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x.P(x) \vee P(y)\big)$

(e) $\big(\forall x.\forall y.R(x, y)\big) \Rightarrow \big(\forall x.\forall y.R(y, x)\big)$

Exercice 2. Élimination des coupures

(a) Mettez la formule suivante sous forme normale négative :

$$\big(P(a) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow P(f(x)))\big) \Rightarrow P(f(f(a)))$$

(b) Trouver une preuve en calcul des séquents en utilisant la règle de coupure. Vous pouvez également utiliser la règle de contraction, qui est admissible :

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathsf{C})$$

Pouvez-vous simplifier la preuve encore plus en utilisant une autre règle admissible ?

(c) Ensuite, trouvez une preuve sans utiliser la règle de la coupure.

Exercice 3. Preuves en calcul des séquents : trouvez l'erreur

(a) Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides et mettez-les sous forme normale négative.

1. $(\exists x.P(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x))$

2. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x))$

(b) Trouvez ensuite toutes les erreurs dans l'application des règles du calcul des séquents dans les arbres de dérivation suivants.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash {\color{orange}\neg P(x), P(x)}}\,(\mathsf{ax})}{\vdash {\color{orange}\forall x.\neg P(x)}, P(x)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.\neg P(x), {\color{orange}\forall x.P(x)}}\,(\forall)}{\vdash {\color{orange}(\forall x.\neg P(x)) \vee (\forall x.P(x))}}\,(\vee)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash {\color{orange}\neg P(x)}, \neg Q(x), {\color{orange}P(x)}}\,(\mathsf{ax})}{\vdash {\color{orange}\neg P(x) \wedge \neg Q(x)}, P(x)}\,(\wedge)}{\vdash {\color{orange}\forall x.\neg P(x) \wedge \neg Q(x)}, P(x)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.\neg P(x) \wedge \neg Q(x), {\color{orange}\exists x.P(x)}}\,(\exists)}{\vdash {\color{orange}(\forall x.\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\exists x.P(x))}}\,(\vee)$$

Exercice 4. * Règles admissibles en calcul des séquents

Pour montrer que la règle d'affaiblissement

$$\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\mathsf{W})$$

est admissible, on peut prouver par induction sur la profondeur de l'arbre de dérivation que $\vdash \Gamma$ implique $\vdash \Gamma, \Delta$ pour tout multi-ensemble Δ.

(a) Considérez le cas particulier où $\Gamma = \{P(x), \forall x.P(x) \vee \neg P(x)\}$ et $\Delta = \{P(y) \wedge \neg P(y)\}$. Donnez une preuve pour le séquent $\vdash \Gamma$ et obtenez ensuite une preuve pour $\vdash \Gamma, \Delta$.

(b) Dans le cas général, on fait une distinction de cas selon la dernière règle employée dans la dérivation π de $\vdash \Gamma$. Donnez tous les détails de la preuve pour les cas $(\exists)$ et $(\forall)$.

Exercice 5. * Examen 2019

On souhaite vérifier que l'inférence est valide dans le syllogisme « Tous les humains sont mortels, or Socrate est humain, donc Socrate est mortel ».

On considère pour cela la signature du premier ordre définie par $\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{s^{(0)}\}$ et $\mathcal{P} \overset{\text{def}}{=} \{H^{(1)}, M^{(1)}\}$ où la constante s représente « Socrate », la relation unaire H représente « être humain » et la relation unaire M représente « être mortel ». On peut alors traduire « tous les humains sont mortels » par $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$, « Socrate est humain » par $H(s)$, et « Socrate est mortel » par $M(s)$.

Montrer que la formule φ_5 ci-dessous est valide, en en fournissant une dérivation dans le calcul des séquents.

$$\varphi_5 \overset{\text{def}}{=} \big((\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)\big) \Rightarrow M(s)$$