TD 1. Logique propositionnelle, équivalence, et conséquence

Rappel : Rappelons que l'on se munit d'un ensemble dénombrable $\mathcal{P}_0$ de propositions, et que l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est défini par la syntaxe abstraite

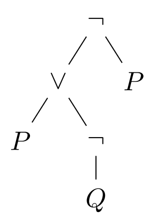
$$\varphi ::= P \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$$

où $P \in \mathcal{P}_0$. La notation $\phi \Rightarrow \psi$ est une abréviation de $\neg\phi \vee \psi$, et $\phi \Leftrightarrow \psi$ est une abréviation de $(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Dans tout ce qui suit, P, Q, R dénotent des éléments de $\mathcal{P}_0$, et φ, ψ des éléments de $\mathcal{F}$.

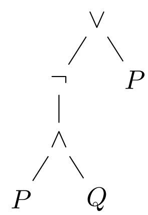
Exercice 1. Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il réprésente une formule propositionnelle. Justifier.

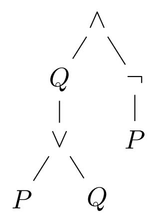
A.



B.



C.



Exercice 2. Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

A. $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$ B. $R \wedge \neg(P \vee Q \wedge \neg R)$

Exercice 3. Pièges des langues naturelles

Formaliser les énoncés suivants (écrits en langue naturelle) en logique propositionnelle. Notez qu'il y a parfois plusieurs réponses possibles, en fonction de votre interprétation de l'énoncé.

(a) « Le matin, il boit un café serré avec une tartine, ou parfois un thé. »

(b) « Si Paris est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(c) « Si Rome est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(d) « Si la Terre n'est pas ronde, je veux bien manger mon chapeau. »

Rappel : Une formule φ est *valide* si toute interprétation satisfait φ, et *satisfiable* s'il existe une interprétation qui satisfait φ.

Exercice 4. Validité et satisfiabilité

Pour chacune des formules propositionnelles φ suivantes, dire si la formule est valide. Si elle ne l'est pas, dire si elle est satisfiable, et le cas échéant, donner une interprétation I telle que $[\![\varphi]\!]^I = 1$.

A. $Q \vee \neg Q$

B. $\neg(P \wedge \neg Q)$

C. $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

> **Rappel :** Une formule ψ est une *conséquence* de φ si toute interprétation qui satisfait φ satisfait aussi ψ. On le note $\varphi \vDash \psi$. Pour des formules de la logique propositionnelle, $\varphi \vDash \psi$ si pour chaque ligne dans la table de vérité de φ qui contient la valeur 1 dans la colonne φ, la ligne correspondante dans la table pour ψ contient la valeur 1 dans la colonne ψ.
>
> Deux formules φ et ψ sont *équivalentes* si $\varphi \vDash \psi$ et $\psi \vDash \varphi$. Pour des formules de la logique propositionnelle, cela veut dire que exactement les mêmes lignes contiennent la valeur 1 dans la colonne de φ que dans la colonne de ψ.

Exercice 5. Équivalences et conséquences logiques

Pour chaque couple de formules φ, ψ dans la liste suivante, écrire leur tables de vérité, et dire lequel des énoncés suivants est vrai :

A. les formules φ et ψ sont équivalentes,

B. $\varphi \vDash \psi$ et $\psi \nvDash \varphi$,

C. $\varphi \nvDash \psi$ et $\psi \vDash \varphi$,

D. $\varphi \nvDash \psi$ et $\psi \nvDash \varphi$.

1. $P \Rightarrow Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$
2. $P \wedge (\neg Q \vee R)$, $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$
3. $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow (Q \vee R)$

Exercice 6. Combinaisons de formules valides et satisfiables

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles.

(a) Montrer que φ et ψ sont valides si et seulement si la formule $\varphi \wedge \psi$ est valide.

(b) Si $\varphi \vee \psi$ est valide, est-ce qu'on peut en déduire que φ est valide ou ψ est valide ? Montrez ou donnez un contre-exemple.

(c) Si φ et ψ sont satisfiables, que peut-on dire de $\varphi \vee \psi$ et de $\varphi \wedge \psi$?

Exercice 7. Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor » $\downarrow$ à deux arguments définie par $0 \downarrow 0 = 1$ et $0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 1 \downarrow 1 = 0$. On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur. Soient φ et ψ des formules propositionnelles.

(a) Exprimer $\varphi \downarrow \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

(b) Exprimer $\neg\varphi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

(c) Exprimer $\varphi \vee \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

(d) Conclure que le connecteur $\downarrow$ est fonctionnellement complet, c'est à dire que : pour toute formule propositionnelle φ il existe une formule propositionnelle φ' écrite à l'aide des propositions et du seul connecteur $\downarrow$ telle que φ et φ' sont équivalentes.