TD 2. Substitutions et formes normales dans la logique propositionnelle

Rappel : Si I est une interprétation, et τ est une substitution propositionnelle, alors $I\tau$ est l'interprétation qui associe à une proposition P la valeur $[\![\tau(P)]\!]^I$. Le *lemme de substitution propositionnelle* garantit que pour toute formule ϕ, $[\![\phi\tau]\!]^I = [\![\phi]\!]^{I\tau}$.

Exercice 1. Engendrer des équivalences par substitution

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles équivalentes, et soit τ une substitution propositionnelle.

(a) Montrer que les formules $\varphi\tau$ et $\psi\tau$ sont équivalentes.

(b) En déduire que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles, les formules $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg\varphi \vee \neg\psi$ sont équivalentes.

Exercice 2. Encore sur les substitutions

Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$ et l'interprétation $I = [1/P, 0/Q, 0/R, 0/S]$.

(a) Calculer les formules $\varphi\tau_1$ et $\varphi\tau_2$.

(b) Calculer les interprétations $I\tau_1$ et $I\tau_2$.

(c) Vérifier que $[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_1}$ et que $[\![\varphi\tau_2]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_2}$.

(d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

Rappel : On rappelle que la mise en forme normale négative peut se faire avec l'algorithme suivant, défini par induction structurelle sur la syntaxe des formules :

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(P) &\stackrel{\text{def}}{=} P\ , & \mathrm{nnf}(\neg P) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
& & \mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}$$

Une formule sous forme normale négative s'écrit donc dans la syntaxe ci-dessous :

(littéraux) $\ell ::= P \mid \neg P$

(formules) $\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$

À partir d'une formule sous cette forme, les deux algorithmes suivants permettent d'obtenir une formule équivalente sous forme normale conjonctive (pour cnf) et sous forme normale disjonctive (pour dnf) :

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) = \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi')\ .$$
$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) = \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi')\ .$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1\leq i\leq m} \bigvee_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1\leq i\leq m} \bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

Exercice 3. Forme normale négative

(a) Calculer $\text{nnf}(\neg(P \vee \neg(Q \wedge \neg R)))$

(b) Calculer $\text{nnf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$.

Exercice 4. Formes clausales

(a) Calculer $\text{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique ?

(b) Donner un algorithme pour vérifier si une formule cnf est valide.

(c) Calculer $\text{dnf}((P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge Q)$.

(d) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 5. Tables de vérité et formes normales disjonctives complètes

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

(a) Écrire la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule dnf ψ telle que ψ soit équivalente à φ.

(b) Calculer $\text{dnf}(\text{nnf}(\varphi))$ et vérifier que cette formule est équivalente à φ.

Rappel : On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ, on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \text{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2 \ , \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \ . \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule non littérale de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.

Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ.

Exercice 6. Forme clausale equi-satisfiable

(a) Calculer la forme normale négative de la *loi de* PEIRCE $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

(b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.

(c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.