

TD 6. Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique

Soit X un ensemble infini dénombrable de symboles de variables. Les formules de la logique du premier ordre sur une signature $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ sont définies par la syntaxe abstraite

(termes)	$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_m)$
(formules atomiques)	$\alpha ::= R(t_1, \dots, t_m)$
(formules)	$\varphi ::= \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\varphi$

où $x \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}_m$ et $R \in \mathcal{P}_m$. Pour un symbole de fonction f on note $f^{(m)}$ quand f est d'arité m , c'est-à-dire quand $f \in \mathcal{F}_m$. De même, on écrit $R^{(m)}$ pour un symbole de relation R d'arité m .

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on étend cette syntaxe avec les opérateurs $\wedge, \neg, \Rightarrow, \top, \perp$. Le quantificateur universel peut être défini comme $\forall x.\varphi = \neg\exists x.\neg\varphi$. (Quelque chose est toujours vrai s'il n'existe pas de contre-exemple.)

Dans les exercices 1, 2 et 4 ci-dessous, on considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{(0)}, m^{(1)}, p^{(1)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{B^{(1)}, G^{(2)}\}.$$

Soient x, y, z des symboles de variables dans X .

Exercice 1. Modélisation : français vers la logique du premier ordre

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$B(x)$	« x a les yeux bleus »
$G(x, y)$	« x est plus grand que y »

et les symboles de fonction suivants

$m(x)$	dénote la mère de x
$p(x)$	dénote le père de x
a	dénote Anne

traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre.

- La mère d'Anne a les yeux bleus.
- Anne est plus grande que sa grand-mère paternelle, mais plus petite que sa grand-mère maternelle.
- Tous ceux dont les deux parents ont les yeux bleus ont aussi les yeux bleus.
- La mère et le père d'Anne ont les yeux bleus, mais Anne ne les a pas.
- Personne n'est plus grand que le père d'Anne.
- Il y a des gens qui ne sont pas plus grands que leur père.

Exercice 2. Formules de la logique du premier ordre

- Pour chacune des expressions suivantes, précisez si elle est un terme bien formé, une formule atomique ou une formule dans la logique du premier ordre sur $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ la signature de l'exercice précédent.

- | | | |
|-----------------|----------------------------------|---|
| 1. $m(a)$ | 7. $G(p(z))$ | 13. $\exists x.(G(x, m(x)) \wedge p(x))$ |
| 2. $G(a, x)$ | 8. $m(G(x, y))$ | 14. $\neg\exists x.(G(x, m(x)) \wedge G(x, p(x)))$ |
| 3. $m(p(x))$ | 9. $G(x, y \vee m(a))$ | 15. $\exists y.G(x, m(a)) \vee G(x, y)$ |
| 4. $p(x)$ | 10. $G(x, G(y, z))$ | 16. $\exists x.\forall y.G(x, y)$ |
| 5. $m(x, a)$ | 11. $m(x) \vee p(y)$ | 17. $\forall x.(G(y, x) \Rightarrow \exists y.G(z, y))$ |
| 6. $G(m(x), a)$ | 12. $(\exists x.m(x)) \vee p(x)$ | 18. $\exists y.m(G(x, a)) \vee G(x, y)$ |

- (b) Pour chacune des formules bien formées ci-dessus, dessinez l'arbre syntaxique correspondant et précisez quelles sont les variables liées et libres.

Exercice 3. Interprétation, satisfiabilité

Soient $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{zero^{(0)}\}$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$. On considère une interprétation I avec domaine $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$ et on interprète le symbole de relation $<$ comme l'ordre habituel sur les nombres naturels, le symbole de relation $=$ comme l'égalité et le symbole de fonction $zero$ comme $zero^I \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

On considère la valuation ρ donnée par $\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ et $\rho(y) \stackrel{\text{def}}{=} 3$.

- (a) Pour chacune des formules suivantes, déterminer si (I, ρ) la satisfait. Pour lesquelles l'interprétation I est-elle un modèle ?
1. $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \exists z.(z < x)$
 2. $\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\exists y.(x < y)$
 3. $\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \exists y.\forall x.((x < y) \vee (x = y))$
 4. $\varphi_3 \stackrel{\text{def}}{=} (x < y) \wedge \neg \exists z.((x < z) \wedge (z < y))$
- (b) Pour quelles valuations ρ' a-t-on $I, \rho' \models \varphi_3$?
- (c) Trouvez une autre interprétation I' avec un domaine infini qui satisfait φ_2 , mais pas φ_1 . Trouvez une interprétation I'' qui satisfait φ_1 et φ_2 . Le symbole $=$ doit être interprété comme la relation d'égalité dans I' et I'' .

Exercice 4. Satisfiabilité, validité, modèle

Pour toute formule φ de la logique du premier ordre, un et un seul des cas suivants se produit :

- (a) φ est insatisfiable.
- (b) φ est satisfiable mais n'a aucun modèle.
- (c) φ a un modèle mais n'est pas valide.
- (d) φ est valide.

Comment déterminer quel cas se produit pour une formule φ donnée ? Pour le cas (a), il faut *prouver* que $I, \rho \not\models \varphi$ pour toute interprétation I et toute valuation ρ . Pour le cas (b), il faut *exhiber* une interprétation I et une valuation ρ telles que $I, \rho \models \varphi$, puis prouver qu'aucune interprétation n'est un modèle de φ . Pour le cas (c), il faut exhiber une interprétation qui est un modèle de φ et une autre interprétation qui n'est pas un modèle de φ . Pour le cas (d), il faut prouver que toute interprétation est un modèle de φ . Une bonne pratique, lorsqu'il s'agit d'exhiber une interprétation I qui vérifie une certaine propriété, est de choisir le domaine D_I de l'interprétation aussi petit que possible (rappel : l'ensemble D_I ne peut pas être vide).

Pour chacune des formules suivantes déterminez quel cas de la liste ci-dessus se produit.

1. $\forall x.(B(x) \vee \neg B(x))$
2. $\forall x.(B(x) \Rightarrow B(z))$
3. $\forall x.\forall y.(B(x) \Leftrightarrow \neg B(y))$
4. $G(x, x) \Rightarrow \exists y. G(x, y)$
5. $(\exists y.G(x, y)) \Rightarrow G(x, x)$
6. $\neg B(y) \wedge (\exists y. B(y))$
7. $\exists x.\forall y. ((B(x) \vee B(y)) \Rightarrow B(y))$