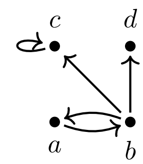
TD 7. Logique du premier ordre : sémantique, renommages et substitutions, formes normales

Exercice 1. Un graphe orienté vu comme interprétation

Considérons le graphe orienté ci-contre. On peut voir ce graphe comme interprétation I d'une signature avec une relation binaire, E. Le domaine de I est $D_I = \{a, b, c, d\}$, et $E^I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (b, d)\}$.
Pour chacune des formules suivantes, (a) donner une valuation ρ telle que la formule est satisfaite par (I, ρ), ou montrer que la formule n'est pas satisfiable dans I ; et (b) montrer que I est un modèle de la formule, ou donner une valuation qui montre que I n'est pas un modèle de la formule.



1. $E(x, x)$
2. $E(x, y) \wedge E(y, x)$
3. $\exists y.(E(x, y) \wedge E(y, z))$
4. $\exists x.E(x, y)$
5. $\forall x.\neg E(x, y)$
6. $\exists y.E(x, y)$

Exercice 2. Équivalences logiques

1. Considérons deux formules φ et ψ telles que $x \notin \mathrm{fv}(\varphi)$. Montrer les équivalences logiques suivantes
   (a) $(\forall x.\psi) \wedge \varphi \Leftrightarrow \forall x.(\psi \wedge \varphi)$
   (b) $(\exists x.\psi) \vee \varphi \Leftrightarrow \exists x.(\psi \vee \varphi)$
2. Les formules $(\forall x.P(x)) \vee \neg P(x)$ et $\forall x.(P(x) \vee \neg P(x))$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Rappel :

Applicabilité: Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si aucune variable liée de φ n'apparaît parmi les variables du domaine et image de σ.

α-renommage: Considérons une formule où une variable x apparaît de façon liée, comme par exemple $\varphi = \exists x.\psi$. Soit x' une variable qui n'apparaît pas dans ψ (en particulier, la substitution $[x'/x]$ est applicable à ψ). L'*α-renommage* $x \mapsto x'$ de φ est la formule $\exists x'.\psi[x'/x]$.

Exercice 3. Substitutions et α-renommage

On considère la signature suivante :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(1)}, g^{(2)}\} \text{ et } \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}\}.$$

et la substitution σ donnée par $[f(z)/x, g(x, y)/y]$. Pour chacune des formules suivantes, donner un α-renommage de la formule à laquelle la substitution σ est applicable, et appliquer σ à la formule renommée.

1. $R(x, y) \wedge \exists x.R(x, x)$
2. $\exists x.R(f(x), y)$
3. $\exists z.R(f(x), z)$
4. $\forall x \exists y.R(x, y)$

Exercice 4. Sensibilité du langage naturel

On s'intéresse à la formule du buveur vue en cours $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$.

1. Énoncez la formule φ en français. Vous paraît-elle valide ?

Vous allez désormais manipuler, à travers trois étapes, la syntaxe de φ. Après chaque étape, énoncez la formule ainsi obtenue en français et dites si elle vous paraît valide.

1. Réécrivez la formule φ en éliminant le symbole de l'implication (utilisez la négation et la disjonction).
2. Expliquez pourquoi on peut appliquer la règle (b) de l'exercice 2 pour obtenir une formule φ' logiquement équivalente à φ. Que vaut φ' ?
3. Expliquez pourquoi on peut appliquer l'α-renommage $y \mapsto x$ à la formule φ'. Qu'obtient-on ?

Rappel : Une formule du premier ordre est en *forme normale négative* si elle respecte la syntaxe abstraite

(littéraux) $\ell ::= \alpha \mid \neg\alpha$

(formules en forme normale négative) $\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi$

où α est une formule atomique et $x \in X$. En d'autres termes, les négations ne peuvent apparaître que devant des formules atomiques.

Pour une formule φ, sa forme normale négative $\mathrm{nnf}(\varphi)$ est obtenue inductivement par

$$
\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha\ , & \mathrm{nnf}(\neg\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}
$$

Exercice 5. Forme normale négative

Mettre sous forme normale négative les formules suivantes :

(a) $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$

(b) $\neg\forall x.\exists y.\forall z.(\neg R(x,z) \vee B(y))$

(c) $(\exists x.(B(x) \wedge \neg R(x,y))) \Rightarrow \neg\forall y.R(y,y)$

Rappel : Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\psi$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et ψ est sans quantificateur, c'est-à-dire ψ respecte la syntaxe abstraite

(formules sans quantificateur) $\psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi\ .$

Exercice 6. Forme prénexe

Pour chaque formule donnée dans l'Exercice 5, trouver une formule équivalente sous forme normale prénexe. N'oubliez pas d'utiliser l'α-renommage si nécessaire.