

TD 8. Logique du premier ordre : théories logiques

Exercice 1. Axiomes de l'égalité et congruences

Comme vu dans les exemples 15.2 et 15.3 des notes de cours, pour une signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ telle que $=^{(2)} \in \mathcal{P}$, la théorie de l'égalité $\text{Th}(A_{\text{eq}})$ est la théorie définie par l'ensemble d'axiomes A_{eq} contenant

- (réflexivité de =) $\forall x. \quad x = x$
- (symétrie de =) $\forall x \forall y. \quad x = y \Rightarrow y = x$
- (transitivité de =) $\forall x \forall y \forall z. \quad (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$

Si $I \models A_{\text{eq}}$, alors on appelle $=^I$ une *équivalence*. L'axiomatisation $A_{\text{cgr}}(L)$ ajoute aux trois axiomes de A_{eq} , pour tout symbole de fonction f d'arité n dans \mathcal{F} ,

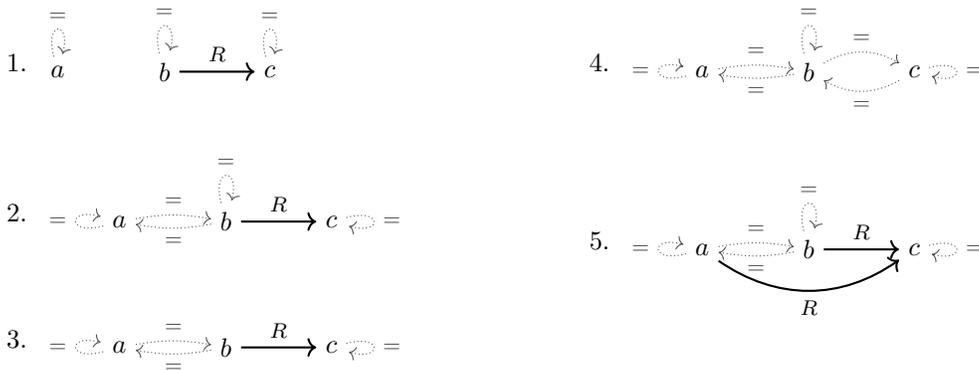
(f -congruence) $\forall x_1 \dots \forall x_n. \forall y_1 \dots \forall y_n. (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$

et pour tout symbole de relation R (différent de =) d'arité n dans \mathcal{P}

(R -congruence) $\forall x_1 \dots \forall x_n. \forall y_1 \dots \forall y_n. (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$

Si $I \models A_{\text{cgr}}(L)$, alors on appelle $=^I$ une *congruence*.

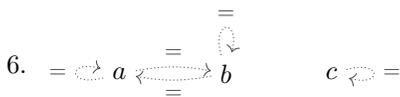
- (a) On pose $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{=^{(2)}, R^{(2)}\}$. Pour chacune des interprétations ci-dessous, dire si la relation $=^I$ (indiquée en pointillés) est une équivalence et si elle est une congruence ; préciser quels axiomes ne sont pas satisfaits dans les cas négatifs.



- (b) Même question pour l'interprétation ci-dessous mais en posant cette fois-ci $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{(2)}\}$:

$$f^I(a, a) = f^I(a, b) = f^I(b, a) = f^I(b, b) = f^I(c, c) = c,$$

$$f^I(a, c) = f^I(c, a) = a, \quad f^I(b, c) = f^I(c, b) = b.$$



- (c) Dans les cas des questions précédentes où la relation $=^I$ était une congruence, donner l'interprétation quotient $I / =^I$.

- (d) Montrer que $\text{Th}(A'_{\text{eq}}) = \text{Th}(A_{\text{eq}})$ où A'_{eq} contient l'axiome de réflexivité de $=$ ainsi que l'axiome suivant :

$$\text{(axiome †)} \quad \forall x \forall y \forall z. \quad (x = y \wedge x = z) \Rightarrow y = z$$

Exercice 2. Axiomatisation d'une classe d'interprétations

Une k -clique d'un graphe est un sous-ensemble C de sommets de cardinalité k tel que chaque sommet de C est adjacent à chaque autre sommet de C , c'est-à-dire, le sous-graphe induit est complet.

Soit la signature $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(2)}, =^{(2)}\}$. Trouver une axiomatisation $A_{k\text{-clique}}$, telle que, pour toute interprétation normale I , $I \models A_{k\text{-clique}}$ si et seulement si (D_I, R^I) est un graphe qui contient une k -clique. (On rappelle qu'une interprétation I est normale si $=^I$ est la relation d'égalité sur D_I .)

Exercice 3. Théories axiomatiques triviales

- Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$. Montrer que $\varphi \in \text{Th}(A)$ si et seulement si φ est une formule close valide.
- Soit A un ensemble de formules closes *valides*. Montrer que $\varphi \in \text{Th}(A)$ si et seulement si φ est une formule close valide.
- Soit φ une formule close. Montrer que $\psi \in \text{Th}(\{\varphi\})$ si et seulement si $\varphi \Rightarrow \psi$ est une formule close valide.

Exercice 4. * Examen 2019

On se place dans la théorie $\text{Th}(A_{\text{ols}})$ des ordres linéaires stricts de l'exemple 15.7 des notes de cours. Montrer que la formule φ_4 donnée ci-dessous appartient à cette théorie :

$$\varphi_4 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y. (\neg(y < x) \Rightarrow \forall z. (x < z \vee x = z))$$