TD 9. Théories logiques : décidabilité

Exercice 1. Élimination des quantificateurs dans $Th(A_{oldns})$.

La théorie des ordres linéaires, denses, non bornés et stricts sur le langage $L = (\emptyset, \{<^{(2)}, =^{(2)}\})$ est axiomatisée par $A_{cqr(L)}$ plus les cinq axiomes suivants :

```
 \forall x. \neg (x < x) \qquad \text{(irréflexivité de <)} \\ \forall x \forall y \forall z. (x < y \land y < z) \Rightarrow x < z) \qquad \text{(transitivité de <)} \\ \forall x \forall y. x < y \lor x = y \lor y < x \qquad \text{(totalité de <)} \\ \forall x \forall y \exists z. (x < y) \Rightarrow (x < z \land z < y) \qquad \text{(densité de <)} \\ \forall x \exists y \exists z. y < x \land x < z \qquad \text{(< est non borné)} \\ \text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{, soit}
```

$$\varphi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n . x_1 < x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} < x_n$$

Utiliser la technique d'élimination des quantificateurs pour décider si $\varphi_n \in \text{Th}(A_{oldns})$.

Exercice 2. Élimination des quantificateurs dans l'arithmétique linéaire rationnelle.

La théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, sur le langage $(\{1^{(0)}, (q \cdot {}^{(1)})_{q \in \mathbb{Q}}, +^{(2)}\}, \{<^{(2)}, =^{(2)}\})$ est la théorie de la structure $(\mathbb{Q}, 1, (q \cdot)_{q \in \mathbb{Q}}, +, <)$ (noter que l'interprétation est normale).

Pour obtenir une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle à un formule φ donnée, nous pouvons exécuter l'algorithme suivant, similaire à ce qui a été vu dans la section 15.2.3 des notes de cours :

- (1) Mettre la formule φ sous forme prénexe.
- (2) Remplacer chaque quantificateur ∀ par ¬∃¬, et faire entrer la deuxième négation.
- (3) Isoler la variable liée par le quantificateur le plus intérieur, et éliminer ce quantificateur.
- (4) Procéder avec (3) jusqu'à ce que tous les quantificateurs ∃ soient éliminés.
- (5) Mettre le résultat en forme de combinaison positive de formules atomiques.

Rappelons aussi que, modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, on a les équivalences suivantes :

$$\neg (s < t) \Leftrightarrow (s = t \lor t < s)$$

$$\exists x (t < x \land x < t') \Leftrightarrow t < t'$$

Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule sans quantificateurs équivalente modulo la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle, c'est-à-dire, la théorie de $(\mathbb{Q}, 1, (q \cdot)_{q \in \mathbb{Q}}, +, <)$.

- (a) $\exists x.(3 < 2x \land 4x < y)$
- (b) $\exists x. \neg (2x < 3x)$
- (c) $\forall x.((\exists y.(y < x \land 5 < y)) \Rightarrow z < 2x)$