SERGE GRIGORIEFF

Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés

Séminaire N. Bourbaki, 1975-1976, exp. n° 478, p. 122-135.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__122_0>

DÉTERMINATION DES JEUX BORÉLIENS ET PROBLÈMES LOGIQUES ASSOCIÉS

[d'après D. MARTIN]

par Serge GRIGORIEFF

Soit A un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on définit un jeu infini $\underline{G}(A)$ à deux joueurs I et II comme suit : I et II choisissent à tour de rôle un élément de $\{0,1\}$, et ce indéfiniment, I faisant le premier choix ; à chaque choix le joueur connait les choix précédemment faits par lui-même et son adversaire (ainsi, le jeu $\underline{G}(A)$ est à information parfaite). Au cours d'une partie, le joueur I choisit donc des éléments $a_o , a_2 , a_4 , \dots$ et le joueur II des éléments $a_1 , a_3 , a_5 , \dots$; soit f la fonction qui à l'entier $n \in \mathbb{N}$ associe a_n , la partie est <u>gagnée</u> par le joueur I si $f \in A$, sinon c'est le joueur II qui a gagné.

Une <u>stratégie</u> pour le joueur I (resp. II) apparaît alors comme une fonction φ de domaine l'ensemble $\mathrm{Seq}(\{0,1\})$ des suites finies de 0 et de 1 (resp. $\mathrm{Seq}(\{0,1\}) - \{\emptyset\}$, i.e. l'ensemble des suites non vides) à valeurs dans $\{0,1\}$; I (resp. II) joue selon la stratégie φ si $a_o = \varphi(\emptyset)$ et $a_{2n+2} = \varphi(\langle a_o , a_1 ,\dots, a_{2n+1}\rangle)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. si $a_{2n+1} = \varphi(\langle a_o , a_1 ,\dots, a_{2n}\rangle)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Une stratégie φ pour un joueur est dite gagnante dans $\underline{G}(A)$ si ce joueur gagne toutes les parties dans lesquelles il a joué selon φ . Notant $\varphi * \psi$ la fonction f obtenue lorsque les joueurs I et II jouent selon les stratégies φ et ψ , on voit que σ est une <u>stratégie gagnante</u> pour I si

$$\forall \tau \qquad \sigma * \tau \in A ,$$

et que τ est une stratégie gagnante pour II si

$$\forall \sigma \qquad \sigma * \tau \notin A .$$

Le jeu $\underline{G}(A)$ - ou encore l'ensemble A - est dit <u>déterminé</u> s'il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs (bien sûr, un seul au plus des joueurs peut avoir une stratégie gagnante). Le problème se pose alors de savoir quels sont les ensembles déterminés.

Gale et Stewart, qui ont introduit ces jeux en 1953 [2], ont montré que les sous-ensembles ouverts de $2^{\mathbb{N}}$ (et aussi les combinaisons booléennes d'ouverts) sont déterminés et ils ont construit, à l'aide d'un bon ordre sur $2^{\aleph_0}$ (et donc de l'axiome du choix) un ensemble non déterminé. En 1954, Wolfe [8] a montré la détermination des G_δ (et des F_σ) ; en 1964, [1] M. Davis a montré celle des $G_{\delta\sigma}$ (et des $F_{\sigma\delta}$).

La solution du problème de la détermination des boréliens plus complexes que les $G_{\delta\sigma}$ ou $F_{\sigma\delta}$ s'est avérée liée à la considération d'ensembles gros tels $\underline{P}(\mathbb{N})$, $\underline{P}(\underline{P}(\mathbb{N}))$, etc... (où $\underline{P}(x)$ dénote l'ensemble des sous-ensembles de x). Le théorème de Gale et Stewart montre en fait la détermination des jeux $\underline{G}(X^{\mathbb{N}}, A)$ dans lesquels les joueurs I et II choisissent des éléments de X au lieu de 0 et de 1 (la définition du jeu restant similaire à la précédente), X étant un ensemble quelconque et A un sous-ensemble ouvert (ou combinaison booléenne d'ouverts) de l'espace $X^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit de la topologie discrète sur X. Une méthode, mise en oeuvre par D. Martin (1970, [4]), pour montrer qu'un ensemble $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ est déterminé, consiste alors à ramener l'existence d'une stratégie gagnante dans le jeu $\underline{G}(A)$ à celle d'une stratégie gagnante dans un jeu ouvert sur $X^{\mathbb{N}}$, i.e. un jeu $\underline{G}(X^{\mathbb{N}}, B)$ où B est ouvert dans $X^{\mathbb{N}}$. Procédant ainsi, J. B. Paris a démontré (1972, [7]) la détermination des sous-ensembles $G_{\delta\sigma\delta}$ de $2^{\mathbb{N}}$, sa preuve utilise un jeu ouvert sur l'espace $(2^{\aleph_0})^{\mathbb{N}}$ ($2^{\aleph_0}$ étant muni de la topologie discrète) et des propriétés combinatoires de type Ramsey sur le cardinal $2^{\aleph_0}$. En 1974, D. Martin a prouvé la détermination de tous les sous-ensembles boréliens de $2^{\mathbb{N}}$ par induction : la détermination des boréliens de classe α étant ramenée à celle de jeux ouverts sur l'espace $(\aleph_\alpha)^{\mathbb{N}}$ ($\aleph_\alpha$ est toujours muni de la topologie discrète et $(\aleph_\alpha)^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit). Nous présentons cette preuve au § 2.

La considération d'ensembles aussi gros que les $\aleph_\alpha$, α variant dans tout $\aleph_1$, dans la preuve de la détermination borélienne est inévitable ainsi que le montre un résultat de H. Friedman (1970, [3]). Quant à la détermination des sous-ensembles analytiques de $2^{\mathbb{N}}$ (i.e. des sous-espaces sousliniens de $2^{\mathbb{N}}$), elle n'est pas démontrable en théorie des ensembles, il s'agit d'une hypothèse de grand cardinal. Ces points sont détaillés au § 3.

§ 1. Les résultats de GALE et STEWART

L'existence (via l'axiome du choix) d'un jeu $\underline{G}(A)$, $A \subset 2^{\mathbb{N}}$, non déterminé permet de montrer simplement ([2]) que la famille des sous-ensembles déterminés de $2^{\mathbb{N}}$ n'est close ni par réunion, ni par intersection, ni par complémentation (noter que les jeux considérés ne sont pas symétriques puisque c'est le joueur I qui ouvre ces jeux), ni par homéomorphisme sur $2^{\mathbb{N}}$.

Soient X un ensemble non vide et $Seq(X)$ la famille des suites finies d'éléments de X , une partie T de $Seq(X)$ est appelée un <u>arbre sur</u> X si

(i) la suite vide est dans T ,

(ii) $(x_o,\dots,x_n) \in T \Rightarrow (x_o,\dots,x_m) \in T$ pour tout $m < n$,

(iii) $(x_o,\dots,x_n) \in T \Rightarrow \exists\, x \in X\ ,\ (x_o,\dots,x_n, x) \in T$.

A chaque arbre T sur X s'associe un sous-ensemble fermé $[T]$ de $X^{\mathbb{N}}$ (avec la topologie produit de la topologie discrète sur X) :

$$[T] = \{f : \mathbb{N} \to X \ ;\ (f(0),\dots,f(n)) \in T\ ,\ \text{pour tout}\ n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Réciproquement toute partie fermée de $X^{\mathbb{N}}$ provient d'un arbre sur X . On considérera toujours $[T]$ muni de la topologie induite par celle de $X^{\mathbb{N}}$, cette topologie admet une base d'ouverts-fermés : les $[T_t]$, $t \in T$, où $T_t = \{s \in T : s$ prolonge t ou s est une restriction de $t\}$.

Gale et Stewart définissent dans [2] des jeux $\underline{G}(T,A)$ où T est un arbre sur un ensemble X et A un sous-ensemble de l'espace $[T]$: I et II choisissent à tour de rôle des éléments de X de sorte que pour tout n la suite $(a_o , a_1 ,\dots, a_n)$ de leurs choix consécutifs soit dans T ; la condition (iii) de définition des arbres assure que le jeu est bien infini ; I gagne la partie si la fonction $n \mapsto a_n$ construite par I et II est dans A , sinon II gagne. Ces jeux $\underline{G}(T,A)$ seront appelés jeux sur T . Une stratégie dans un tel jeu apparaît comme une fonction φ de T dans X telle que pour tout $(x_0,\ldots,x_n) \in T$ on ait $(x_0,\ldots,x_n,\varphi(\langle x_0,\ldots,x_n\rangle)) \in T$. Les notions de jeux selon une stratégie pour I ou II , de stratégie gagnante et de sous-ensemble déterminé de $[T]$ se définissent de façon évidente. Les cas $T = \mathrm{Seq}(\{0,1\})$ et $T = \mathrm{Seq}(X)$ donnent les jeux décrits dans l'introduction.

Bien que le complémentaire d'un sous-ensemble déterminé de $[T]$ ne soit pas toujours déterminé, pour les classes usuelles de parties de $[T]$ (ouverts, G_δ ,..., analytiques) la détermination de tous les éléments de ces classes implique celle des complémentaires. Cela résulte du lemme suivant.

Si B est un ensemble de suites on pose $B^{(x)} = \{(y,z,\ldots) ; (x,y,z,\ldots) \in B\}$.

Lemme 1.- *Soit* $A \subset [T]$; *si pour toute suite à un élément* $(x_0) \in T$ *le jeu* $\underline{G}(T^{(x_0)}, A^{(x_0)} \cap [T^{(x_0)}])$ *est déterminé alors le jeu* $\underline{G}(T,[T]-A)$ *est déterminé.*

En effet, si II a une stratégie gagnante τ dans quelque jeu $\underline{G}(T^{(x_0)}, A^{(x_0)} \cap [T^{(x_0)}])$ alors $\sigma = \tau \cup \{(\emptyset, x_0)\}$ est une stratégie gagnante pour I dans $\underline{G}(T,[T]-A)$, si I a une stratégie gagnante σ_{x_0} dans chaque jeu $\underline{G}(T^{(x_0)}, A^{(x_0)} \cap [T^{(x_0)}])$ alors II a une stratégie gagnante τ dans $\underline{G}(T,[T]-A)$ définie par

$$\tau(\langle a_0,\ldots,a_n\rangle) = \sigma_{a_0}(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle) .$$

La notion suivante a été introduite par Davis [1] :

DÉFINITION.- *Soit* T *un arbre ; un sous-jeu* I-*imposé est un sous-ensemble* T' *de* T *qui est un arbre et tel que, pour tout* n , *on ait*

$$(x_0,\ldots,x_{2n}) \in T' \ \underline{\text{et}}\ (x_0,\ldots,x_{2n},x) \in T \Rightarrow (x_0,\ldots,x_{2n},x) \in T' .$$

On définit de façon analogue la notion de sous-jeu II-imposé.

En quelque sorte, T' est un sous-jeu I (ou II)-imposé si I (ou II) peut obliger son adversaire à jouer dans T' .

Le lemme suivant illustre la définition.

Lemme 2.- Soit A une partie de $[T]$.

(i) Si I n'a pas de stratégie gagnante pour le jeu $\underline{G}(T,A)$ alors la famille T' des $t \in T$ pour lesquels I n'a pas de stratégie gagnante dans le jeu $\underline{G}(T_t, [T_t] \cap A)$ est un sous-jeu II-imposé de T tel que $[T'] \subset \overline{[T] - A}$. Ainsi, toute stratégie pour II dans T' est une stratégie gagnante pour II dans le jeu $\underline{G}(T,\mathring{A})$.

(ii) Si II n'a pas de stratégie gagnante pour le jeu $\underline{G}(T,A)$ alors la famille T' des $t \in T$ pour lesquels II n'a pas de stratégie gagnante dans le jeu $\underline{G}(T_t, [T_t] \cap A)$ est un sous-jeu I-imposé de T tel que $[T'] \subset \bar{A}$. Ainsi, toute stratégie pour I dans T' est une stratégie gagnante pour I dans $\underline{G}(T,\bar{A})$.

La dernière assertion de (i) se prouve en observant que dans le jeu ouvert $\underline{G}(T,\mathring{A})$ si I gagne une partie, il la gagne en un nombre fini de coups : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $a_o,\ldots,a_{n-1}$ sont les n premiers coups joués alors $[T_{(a_o,\ldots,a_{n-1})}] \subset \mathring{A}$; pour gagner dans $\underline{G}(T,\mathring{A})$ il suffit donc pour II d'éviter à chaque coup cette situation, ce qui est le cas s'il joue dans T' (son adversaire étant alors obligé d'y jouer aussi).

En corollaire du lemme 2, on obtient le théorème de Gale et Stewart :

THÉORÈME.- Si A est ouvert ou fermé, alors $\underline{G}(T,A)$ est déterminé.

Dans le cas où A est ouvert et où I n'a pas de stratégie gagnante pour $\underline{G}(T,A)$, le sous-jeu T' introduit dans le lemme 2 (i) sera appelé le sous-jeu gagnant de II . De même si A est fermé et II n'a pas de stratégie gagnante pour $\underline{G}(T,A)$, le sous-jeu T' introduit dans le lemme 2 (ii) sera appelé le sous-jeu gagnant de I .

§ 2. Le théorème de D. MARTIN

THÉORÈME (D. Martin, 1974 [5]).- *Soit* T *un arbre ; pour toute partie borélienne* A *de* $[T]$ *, le jeu* $\underline{G}(T,A)$ *est déterminé*.

Le lemme qui suit est la clef de la preuve :

Lemme.- *Soient* T *un arbre,* $\underline{G} = \underline{G}(T,A)$ *un jeu sur* T *et* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille de parties fermées de* $[T]$ *. Il existe un arbre* T^* *sur un ensemble de cardinal* $2^{\operatorname{card}(T)}$ *et une surjection continue* $\varphi : [T^*] \to [T]$ *tels que les* $\varphi^{-1}(F_i)$ *sont à la fois ouverts et fermés dans* $[T^*]$ *et la détermination du jeu* $\underline{G}^* = \underline{G}(T^*, \varphi^{-1}(A))$ *implique celle du jeu* $\underline{G}$.

A partir du lemme on montre facilement par induction la détermination des boréliens de classe finie. En effet, soit A un borélien de classe n , supposons par exemple que n est impair et que A s'écrit sous la forme

$$A = \bigcup_{k_o\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_1\in\mathbb{N}} \cdots \bigcup_{k_{n-1}\in\mathbb{N}} A_{k_o\ldots k_{n-1}} \quad \text{, les } A_{k_o\ldots k_{n-1}} \text{ étant}$$

des parties fermées ; le lemme permet d'obtenir T^* et φ tels que

$$\varphi^{-1}(A) = \bigcup_{k_o\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_1\in\mathbb{N}} \cdots \bigcap_{k_{n-2}\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k_{n-1}\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(A_{k_o\ldots k_{n-1}}) \Big)$$

où les $\varphi^{-1}(A_{k_o\ldots k_{n-1}})$ sont ouverts, $\varphi^{-1}(A)$ est donc de classe $n-1$; par l'hypothèse d'induction le jeu borélien de classe $n-1$ $\underline{G}(T^*, \varphi^{-1}(A))$ est déterminé, le lemme assure alors que le jeu $\underline{G}(T,A)$ l'est aussi.

La détermination des boréliens de classe infinie s'obtient en itérant transfiniment la construction assurée par le lemme, le passage des ordinaux limites se faisant par une sorte de limite inverse.

Preuve du lemme. On construit l'arbre T^* comme réunion d'ensembles T^*_n , $n \in \mathbb{N}$, formés de suites finies de longueur n d'éléments de $T\times\underline{P}(T)\times\{0,1\}$ du type $x = (t, X, \varepsilon)$ où X est un sous-arbre de T qui contient t . Les ensembles T_n^* sont définis par induction ; $T_o^* = \{\emptyset\}$, T_{2n+1}^* et T_{2n+2}^* sont définis en prolongeant les éléments de T_{2n}^* par les choix que pourront faire I puis II dans $\underline{G}^*$ comme suit :

<u>cas</u> $n = 2m$: si $(x_o,\dots,x_{4m-1}) \in T_{4m}^*$ et $x_{4m-1} = (t, X, \varepsilon)$;

alors I peut jouer un élément $x_{4m} = (t', X, 0)$ où $t' \in X$, t' prolonge t et a un élément de plus que t, puis II peut jouer un élément $x_{4m+1} = (t'', X, 0)$ où t'' prolonge t', a un élément de plus que t' et est dans X. Si $m = 0$, alors I peut jouer un élément $x_o = (t, T, 0)$, puis II un élément $x_1 = (t', T, 0)$ où t est une suite de longueur 1 de T et t' une suite de longueur 2 qui prolonge t.

<u>cas</u> $n = 2m+1$: si $(x_o,\dots,x_{4m+1}) \in T_{4m+2}^*$ et $x_{4m+1} = (t, X, \varepsilon)$;

alors I peut jouer un élément $x_{4m+2} = (t, X', 0)$ où X' est un sous-jeu I-imposé de X qui contient t. Puis II a deux options à son choix :

(i) S'il existe $t' \in X'$, t' prolongeant t et de longueur paire telle que $[T_{t'}]$ est disjoint de F_m, alors II peut jouer un élément $x_{4m+3} = (t', X, 0)$ où t' est comme il vient d'être dit.

(ii) S'il existe une stratégie gagnante pour II dans le jeu $\underline{G}' = \underline{G}(X'_t, [X'_t] - F_m)$, alors II peut jouer un élément $x_{4m+3} = (t, Y, 1)$ où Y est le sous-jeu gagnant de II (pour $\underline{G}'$).

Appelons $\hat{\varphi}$ la fonction de T^* dans T qui à $\langle x_o,\dots,x_n\rangle$ associe la première coordonnée de x_n ; on remarque que $\hat{\varphi}$ transforme toute suite de longueur paire en une suite de longueur paire ; comme $\hat{\varphi}$ respecte l'ordre de prolongement de suites, elle induit une application canonique $\varphi : [T^*] \to [T]$ qui est continue, on note que φ est surjective.

Dans une partie $(x_o, x_1, \dots)$ du jeu sur T^*, si $x_{4i+3} = (t, X, \varepsilon)$, alors $[T^*_{(x_o,\dots,x_{4i+3})}]$ est disjoint ou inclus dans $\varphi^{-1}(F_i)$ selon que $\varepsilon = 0$ ou 1 ; il en résulte que $\varphi^{-1}(F_i)$ est égal à

$$\cup\{[T^*_{(x_o,\ldots,x_{4i+3})}]\ ;\ x_{4i+3} \text{ est de la forme } (t\,,X\,,1)\}$$

et est donc ouvert.

Reste à voir qu'à toute stratégie gagnante pour un des joueurs dans le jeu $\underline{G}^* = \underline{G}(T^*\,,\varphi^{-1}(A))$ on peut associer une stratégie gagnante pour ce même joueur dans le jeu $\underline{G} = \underline{G}(T,A)$.

Supposons que I ait une stratégie gagnante σ^* dans $\underline{G}^*$, ce qui suit décrit une stratégie σ pour I dans le jeu $\underline{G}$. Le joueur I cherche à interpréter la partie du jeu $\underline{G}$ qu'il joue avec II comme image par φ d'une partie du jeu $\underline{G}^*$ jouée selon σ^* . S'il a imaginé que la suite $t = (a_o,\ldots,a_{2m-1}) \in T$ provient par $\hat{\varphi}$ d'une suite $(x_o,\ldots,x_{2n-1}) \in T^*$ où $x_{2n-1} = (t\,,X\,,\varepsilon)$, alors

1) Si $n = 2i$, la stratégie σ lui dit de jouer a_{2m} tel que $\sigma^*(\langle x_o,\ldots,x_{4i-1}\rangle) = (\langle a_o,\ldots,a_{2m-1}\,,a_{2m}\rangle\,,X\,,0)$. Si II joue alors a_{2m+1} tel que la suite $\langle a_o,\ldots,a_{2m}\,,a_{2m+1}\rangle \in X$, I imagine que la suite $\langle a_o,\ldots,a_{2m+1}\rangle$ provient de la suite $(x_o,\ldots,x_{4i-1}\,,x_{4i}\,,x_{4i+1}) \in T^*$ où $x_{4i} = \sigma^*(\langle x_o,\ldots,x_{4i-1}\rangle)$ et $x_{4i+1} = (\langle a_o,\ldots,a_{2m+1}\rangle\,,X\,,0)$.

2) Si $n = 2i+1$, soit X' le sous-jeu de X tel que $\sigma^*(x_o,\ldots,x_{4i+1}) = (t\,,X'\,,0)$, alors

a) Dans le cas où I a une stratégie gagnante pour $\underline{G}' = \underline{G}(X'_t\,,[X'_t] - F_i)$, la stratégie σ coïncide alors avec cette stratégie jusqu'à ce que II joue en dehors de X' ou bien qu'une suite $t' = \langle a_o,\ldots,a_{2m-1}\,,a_m\,\cdots\,a_{2\ell-1}\rangle$ soit atteinte dans X' telle que $[X'_{t'}]$ soit disjoint de F_i , et alors I imagine que cette suite t' provient de la suite $(x_o,\ldots,x_{4i+1}\,,x_{4i+2}\,,x_{4i+3})$ où $x_{4i+2} = (t\,,X'\,,0)$ et $x_{4i+3} = (t'\,,X\,,0)$.

b) Dans le cas où II a une stratégie gagnante pour $\underline{G}' = \underline{G}(X'_t\,,[X'_t] - F_i)$, alors I réinterprète la suite $(a_o,\ldots,a_{2m-1}) \in T$ comme provenant de la suite

$(x_o,\dots,x_{4i+1}, x_{4i+2}, x_{4i+3})$ où $x_{4i+2} = (t, X', 0)$ et $x_{4i+3} = (t, X'', 1)$ où X'' est le sous-jeu gagnant de II dans $\underline{G}'$.

3) Si dans les cas 1 ou 2 a) le joueur II joue en dehors de X ou X' , la suite de coups joués étant alors $(a_o,\dots,a_{2m-1}, a_{2m},\dots a_{2\ell-1})$ avec $a_{2\ell-1}$ non dans X ou X' , comme X et X' sont soit un sous-jeu II - gagnant d'un jeu $\underline{G}(Z, [Z] - F_j)$ où $j < i$, soit un sous-jeu I-imposé d'un tel jeu, c'est que II (qui ne se soucie pas de l'interprétation dans $\underline{G}^*$ que donne I de la partie jouée dans $\underline{G}$) s'est écarté du sous-jeu II-gagnant Y pour $\underline{G}(Z, [Z] - F_j)$ que I avait imaginé joué par II en $x_{4j+3} = (s, Y, 1)$ (où s est un élément de T). La stratégie σ de I lui demande alors de jouer comme une certaine stratégie gagnante qu'il possède pour le jeu $\underline{G}(Z_{(a_o,\dots,a_{2\ell-1})}, [Z_{(a_o,\dots,a_{2\ell-1})}] - F_j)$ jusqu'à ce que II joue en dehors de Z ou bien qu'une suite $(a_o,\dots,a_{2\ell-1}, a_{2\ell},\dots a_{2p-1})$ soit atteinte dans Z telle que $[Z_{(a_o,\dots,a_{2p-1})}]$ soit disjoint de F_j , et alors I imagine que cette suite $t' = (a_o,\dots,a_{2p-1})$ provient par $\hat{\varphi}$ de la suite $(x_o,\dots,x_{4j+2}, y_{4j+3})$ où $y_{4j+3} = (t', Z, 0)$.

Si II joue en dehors de Z , I traite cela comme il l'a fait du jeu en dehors de X ou X' . Comme $i > j > \dots$ est une suite d'entiers décroissante, I finit par imaginer un début de partie dans $\underline{G}^*$ où il joue selon σ^* et dont l'image par $\hat{\varphi}$ est une suite $(a_o,\dots,a_{2m-1},\dots a_{2q-1})$ où il joue selon la stratégie σ .

Au cours d'une partie I n'a à réviser qu'au plus une fois le coup x_3 qu'il a imaginé être joué par II dans une partie pour $\underline{G}^*$; après cela I n'a à réviser qu'au plus une fois le coup x_7 qu'il a imaginé être joué par II, etc... On voit alors que les débuts de partie dans $\underline{G}^*$ imaginés par I convergent vers une partie du jeu $\underline{G}^*$, soit $(x_o,x_1,\dots)$; cette partie étant jouée par I selon σ^* , on a $(x_o,x_1,\dots) \in \varphi^{-1}(A)$, il en résulte que la partie du jeu $\underline{G}$ que I a joué selon σ est une suite $(a_o,a_1,\dots) \in A$. Ainsi, σ est une stratégie gagnante pour I dans $\underline{G}(T,A)$.

Supposons maintenant que II a une stratégie gagnante τ^* pour $\underline{G}^*$, ce qui suit décrit une stratégie τ pour II dans le jeu $\underline{G}$. Le joueur II cherche à interpréter la partie du jeu $\underline{G}$ qu'il joue avec I comme image par φ d'une partie de $\underline{G}^*$ jouée selon τ^* . S'il a imaginé que la suite $t = (a_o,\ldots,a_{2m-1}) \in T$ provient par $\hat{\varphi}$ d'une suite $(x_o,\ldots,x_{2n-1}) \in T^*$ où $x_{2n-1} = (t\,,X\,,\varepsilon)$, alors

1) Si $n = 2i$, la stratégie τ lui dit de répondre au coup a_{2m} de I par a_{2m+1} - ceci si $(\langle a_o,\ldots,a_{2m}\rangle\,,X\,,0) \in T^*$ - tel que

$$(\langle a_o,\ldots,a_{2m}\,,a_{2m+1}\rangle\,,X\,,0) = \tau^*((x_o,\ldots,x_{4i-1}\,,(\langle a_o,\ldots,a_{2m}\rangle\,,X\,,0))) \quad ;$$

II s'imagine alors que $\langle a_o,\ldots,a_{2m+1}\rangle$ provient de $\langle x_o,\ldots,x_{4i-1}\,,x_{4i}\,,x_{4i+1}\rangle$ où $x_{4i} = (\langle a_o,\ldots,a_{2m}\rangle\,,X\,,0)$ et $x_{4i+1} = (\langle a_o,\ldots,a_{2m+1}\rangle\,,X\,,0)$.

2) Si $n = 2i+1$, soit $Y = \cup\{[X_s]$; $s \in X_t$ et il existe un sous-jeu I-imposé X' de X tel que $t \in X'$ et $\tau^*(x_o,\ldots,x_{4i+1}\,,(t\,,X'\,,0)) = (s\,,X\,,0)\}$

a) Dans le cas où II a une stratégie gagnante pour $\underline{G}(X_t\,,[X_t] - Y)$ la stratégie τ coïncide avec cette stratégie jusqu'à ce que I joue en dehors de X ou bien qu'une suite $s \in Y$ soit obtenue, alors II imagine que s provient de $(x_o,\ldots,x_{4i+1}\,,x_{4i+2}\,,x_{4i+3})$ où $x_{4i+2} = (t\,,X'\,,0)$ et $x_{4i+3} = (s\,,X\,,0)$ et X' est tel que $\tau^*(x_o,\ldots,x_{4i+1}\,,x_{4i+2}) = (s\,,X\,,0)$.

b) Dans le cas où I a une stratégie gagnante pour $\underline{G}(X_t\,,[X_t] - Y)$, II réinterprète la suite $\langle a_o,\ldots,a_{2m-1}\rangle$ comme image de $\langle x_o,\ldots,x_{4i+1}\,,x_{4i+2}\,,x_{4i+3}\rangle$ où $x_{4i+2} = (t\,,Z\,,0)$, Z étant le sous-jeu I-gagnant pour $\underline{G}(X_t\,,[X_t] - Y)$ - ce qui a un sens puisque Y est ouvert - et $x_{4i+3} = \tau^*(\langle x_o,\ldots,x_{4i+2}\rangle)$. Notons que x_{4i+3} est de la forme $(t\,,U\,,1)$.

3) Les cas où I joue en dehors de X sont des cas où I joue hors de son sous-jeu gagnant d'un $\underline{G}(U_t\,,[U_t] - V)$ introduit comme en 2 b) dans l'interprétation d'une restriction de la suite $\langle a_o,\ldots,a_{2m-1}\rangle$. La stratégie de II

est alors toute analogue à ce qui a été décrit plus haut dans le cas 3) pour I.

On montre de la même façon que la stratégie τ ainsi définie est gagnante pour II dans $\underline{G}$. Ceci achève la preuve du Lemme.

Remarques.- 1) L'axiome du choix a été utilisé dans la preuve donnée plus haut pour choisir des éléments dans des ensembles de cardinal élevé. Cependant, un argument logique permet de montrer que l'axiome du choix dénombrable suffit pour montrer la détermination des jeux boréliens $\underline{G}(T,A)$ lorsque T est un arbre sur un ensemble bien ordonnable.

2) On peut dans le lemme améliorer la majoration $\mathrm{card}(T^*) \leq 2^{\mathrm{card}(T)}$ en $\mathrm{card}(T^*) \leq (\mathrm{card}(T))^+$ = premier cardinal plus grand que $\mathrm{card}(T)$, ceci en restreignant les sous-jeux à être dans un univers du type $L[S]$ où S est un ensemble d'ordinaux, codant T et les F_i , de cardinal celui de T .

§ 3. Problèmes logiques liés à la détermination de certaines classes d'ensembles

La preuve de Martin de la détermination des jeux boréliens sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de classe n est faite en ramenant ces jeux à des jeux ouverts sur un espace $X^{\mathbb{N}}$ où X est de cardinal celui de $\underbrace{\underline{P}\ \underline{P} \ldots \underline{P}}_{n \text{ fois}}(\mathbb{N})$ - ou, au mieux, $\aleph_n$ d'après la remarque 2 -. En combinant cette preuve avec celle de Davis [1] de la détermination des $G_{\delta\sigma}$, il est possible de montrer ainsi la détermination des boréliens de classe $n+2$ sans changer X . Pour montrer la détermination des boréliens de classe α , $\alpha \in \aleph_1$, Martin introduit selon le même schéma un ensemble X de cardinal $\aleph_\alpha$.

Un argument logique (Friedman, 1970 [3]) montre que l'introduction d'ensembles de type supérieur, tels les $\aleph_\alpha$, α variant dans $\aleph_1$, est inévitable, et ce pas par pas :

- dans une théorie des ensembles où l'axiome des parties est omis, on peut prouver la détermination des jeux $G_{\delta\sigma}$ mais pas celle des $G_{\delta\sigma\delta}$;

- si l'on admet l'existence du cardinal $\aleph_1$, i.e. d'un ensemble non dénombrable, alors on peut prouver la détermination des $G_{\delta\sigma\delta}$ mais pas celle des $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$;

- si l'on admet l'existence des cardinaux $\aleph_1,\dots,\aleph_n$, alors on peut prouver la détermination des boréliens de classe $n+2$ mais pas celle des boréliens de classe $n+3$.

De l'existence des $\aleph_n$, $n \in \mathbb{N}$, on ne déduit celle de $\aleph_\omega$ qu'à partir de l'hypothèse que la famille des $\aleph_n$, image de $\mathbb{N}$ par la relation fonctionnelle $n \longmapsto \aleph_n$ est un ensemble (avec la terminologie de Bourbaki cette hypothèse exprime que la relation entre n et $\aleph_n$ est collectivisante). Si cette hypothèse n'est pas faite alors, même avec l'axiome des parties - qui assure l'existence des cardinaux $\aleph_n$, $n \in \mathbb{N}$ - on prouve seulement la détermination des boréliens de classe finie et non celle des boréliens de classe infinie (en particulier, pas celle des boréliens de classe $\omega+3$). Ce phénomène se poursuit dans le transfini ([6]).

Ainsi, la détermination borélienne est le premier exemple d'énoncé mathématique - rencontré dans une pratique et non construit ad hoc - portant sur des objets de type simple (les boréliens de la droite) mais dont la preuve exige l'introduction d'objets du type supérieur, faisant ainsi sortir du cadre usuel des mathématiques (dans lequel tout ensemble est au plus de cardinal $2^{2^{\aleph_0}}$).

Puisque la détermination borélienne est décidable dans la théorie des ensembles ZF de Zermelo et Fraenkel (ou celle de Bourbaki) à laquelle adhère notre intuition, son indécidabilité dans une théorie moins riche - mais qui est celle réellement utilisée dans la pratique mathématique - ne nous gêne pas. La situation est toute différente quant à la détermination des sousliniens et de la tribu qu'ils engendrent. Un résultat de Davis [1] - exprimant que l'hypothèse de Cantor est vraie pour une classe $\mathcal{C}$ d'ensembles de parties de $2^{\mathbb{N}}$ dès que cette classe, assez régulière, est déterminée : si $X \in \mathcal{C}$, alors X est dénombrable ou contient un parfait - montre simplement que la détermination souslinienne est fausse dans l'univers des ensembles constructibles de Gödel (il existe alors un co-souslinien sans la propriété de Cantor ; d'autre part la détermination des sousliniens implique celle de leurs complémentaires). Les travaux de Friedman, Martin et Harrington ont permis de connaître l'exacte complexité logique de l'hypothèse H de la détermination des parties sousliniennes de $2^{\mathbb{N}}$. Cette hypothèse H illustre le célèbre 2^{d} théorème d'incomplétude de Gödel : soit H est fausse (auquel cas une preuve de sa négation finira par être trouvée), soit sa non-contradiction ne peut se montrer à partir de celle de la théorie des ensembles par des moyens qui y sont formalisables. Il s'agit donc d'un énoncé faux ou indécidable dans un sens très fort : ZF ne décide pas H , la non-contradiction de ZF + non H se déduit de façon élémentaire de celle de ZF mais la non-contradiction de ZF + H ne se déduit pas (dans ZF) de celle de ZF . Rappelons à ce moment que l'axiome du choix AC et l'hypothèse du continu HC sont indécidables dans ZF de façon moins complexe (et ils n'illustrent pas le 2^{d} théorème d'incomplétude) : de la non-contradiction de ZF se déduisent élémentairement celles de ZF + AC + HC , ZF + non AC , ZF + AC + non HC .

Signalons que l'hypothèse du cardinal mesurable d'Ulam qui affirme l'existence d'un ensemble muni d'un ultrafiltre non principal et clos par intersections dénombrables - on montre alors, si tant est que cette hypothèse n'est pas contradictoire, qu'un tel ensemble est éléphantesque - implique la détermination souslinienne (Martin [4], 1971). Cependant, si la détermination des sousliniens implique celle de leurs combinaisons booléennes, celle de la tribu qu'ils engendrent n'est même pas conséquence de l'hypothèse d'Ulam (Martin [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DAVIS - Infinite games with perfect information, Advances in game theory, Annals of Math. Studies n° 52, Princeton Univ. Press, 1964, 85-101.

[2] D. GALE and F.M. STEWART - Infinite games with perfect information, Contribution to the theory of games, Annals of Math. Studies n° 28, Princeton Univ. Press, 1953, 245-266.

[3] H. FRIEDMAN - Higher set theory and mathematical practice, Annals of Math. Logic, 2 (1971), 326-357.

[4] D.A. MARTIN - Measurable cardinals and analytic games, Fund. Math., 66 (1970), 287-291.

[5] D.A. MARTIN - Borel determinacy, Annals of Math., 102 (1975), 363-371.

[6] D.A. MARTIN - Borel and projective games, Springer Verlag, à paraître.

[7] J.B. PARIS - $ZF \vdash \Sigma_4^0$ determinateness, Jour. Symbolic Logic, 37 (1972), 661-667.

[8] P. WOLFE - The strict determinateness of certain infinite games, Pac. Journ. of Math., 5 (1955), 841-847.