Algorithmique — Maîtrise
TD 8
Algorithme de Bellman Ford et arbres couvrants minimaux

1 Algorithme de Bellman Ford

On rappelle l'algorithme vu en cours

```
Bellman-Ford(G,w,s)
Variable
   int dist[|V|]
debut
initialiser dist[u] à +infini pour tout u dans V
dist[s]=0

pour i de 1 a |V|-1 faire
  pour chaque arc (u,v) faire relacher (u,v)
  fin pour
fin pour

pour chaque arc (u,v) faire
  si dist[u] + w(u,v) < dist[v] retourner Faux
fin pour

retourner Vrai
fin
```

Cet algorithme retourne `Faux` si le graphe comporte un cycle de poids négatif, `Vrai` sinon, et dans ce cas le tableau `dist` contient les plus courtes distance a s.

Exercice 1 : Appliquer cet algorithme au graphe $G = (V, E, w)$ defini par :
$V = \{u, v, x, y, z\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ avec $e_1 = (z, u), w(e_1) = 6, e_2 = (u, v), w(e_2) = 5, e_3 = (v, u), w(e_3) = -2, e_4 = (z, x), w(e_4) = 7, e_5 = (u, x), w(e_5) = 8, e_6 = (y, v), w(e_6) = 7, e_7 = (x, y), w(e_7) = 9, e_8 = (y, z), w(e_8) = 2, e_9 = (u, y), w(e_9) = -4, e_{10} = (x, v), w(e_{10}) = -3$
On prendra pour source le sommet u.
Changer le poids de l'arc (y, v) à 4, et recommencez.
Reprendre la preuve de correction de Bellman-Ford.

Exercice 2 : On veut modifier l'algorithme de Bellman-Ford de sorte qu'il donne à $d[v]$ la valeur $-\infty$ pour tout les sommets v dont un chemin à partir de l'origine contient un circuit de poids négatif.

1. Quelle ligne de l'algorithme détecte l'existence d'un cycle de poids négatif ?
2. On veut montrer que c'est effectivement le cas. Soit un circuit élémentaire $v_0, v_1..v_k$ de poids négatif, avec $v_0 = v_k$. En raisonnant par l'absurde montrer que l'algorithme retourne faux.
3. A votre avis, au moment du rejet
   (a) tout cycle élémentaire négatif voit tous ses arcs rejetés par le test
   (b) tout cycle élémentaire négatif voit l'un de ses arcs rejeté par le test
   (c) il existe un cycle élémentaire négatif dont tous les arcs sont rejetés par le test

(d) il existe un cycle élémentaire négatif dont l'un des arcs est rejeté par le test

(e) s'il existe un chemin qui arrive en v, par l'arc (u, v) et qui comporte un cycle élémentaire négatif alors le test rejette l'arc u, v.

4. Ecrivez un algorithme qui résolve le problème de cet exercice.

2 Arbres couvrants minimaux : Algorithme de Prim

Exercice 3 :

Soit un graphe valué $G = (V, E)$ et soit $A \subseteq E$, un sous-ensemble d'arêtes incluses d'en un arbre couvrant minimal de G. Une arête (u, v) est *sûre* pour A si l'ensemble $A \cup \{(u, v)\}$ est inclus dans un arbre couvrant minimal de G.

On a alors l'algorithme générique suivant de calcul d'un arbre couvrant minimal :

```
Generique-MST(G,w)
  A ensemble vide
  Tant que A ne forme pas un arbre couvrant minimal faire
     Choisir une arête sure (u,v) pour A
        A = A union {(u,v)}
  Retourner A
```

1. Proposer un invariant pour cet algorithme et prouver sa terminaison.
2. Une *coupe* est une partition $(S, V \setminus S)$ de V. Une arête traverse une coupe $(S, V \setminus S)$ si elle part de S et arrive en $V \setminus S$. Une coupe respecte un sous-ensemble A d'arêtes s'il n'y a pas d'arête de A qui la traverse. Une arête est *claire* si elle traverse la coupe et est de poids minimal.

   Soit un sous-ensemble A de E qui est inclus dans un arbre couvrant minimal, soit $(S, V \setminus S)$ une coupe qui resepecte A et soit (u, v) une arête claire pour la coupe. Montrer que $\{(u, v)\}$ est sûre pour A.
3. En déduire la validité de l'algorithme de Prim.