Algorithmique – Maîtrise

TD 3 : Composantes fortement connexes

1 Échauffement

Exercice 1 :

André est au moins aussi grand qu'Éléonore qui est au moins aussi grande que Ben et que Farid. Ben est quant à lui au moins aussi grand que Gaëlle et que David. Farid est au moins aussi grand que Clara. Gaëlle est au moins aussi grande qu'André et qu'Éléonore. David, lui, est au moins aussi grand que Clara qui est au moins aussi grande que Farid.

On représente la relation, "André est au moins aussi grand qu'Éléonore" par $A \rightarrow E$.

- Dessiner le graphe correspondant.
- Donner les composantes fortement connexes du graphe.
- Que veut dire que X est dans la même composante fortement connexe que Y ?
- Combien y a-t'il de tailles possibles différentes ?
- Donner une solution au problème si les tailles possibles sont 1m60, 1m74, 1m80 et 1m91 ?

Exercice 2 :

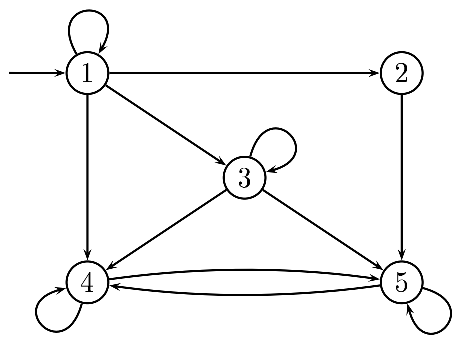

Fig. 1 – G

Appliquer au graphe de la figure 1 l'algorithme de Tarjan de calcul des composantes fortement connexes vu en cours.

Exercice 3 :

Faire de même avec l'algorithme de Kosaraju.

Exercice 4 :

Observer en quoi l'ajout d'un arc peut modifier le nombre de composantes fortement connexes d'un graphe.

Exercice 5 :

Étudier la complexité des algorithmes.

2 Algorithme simple : le graphe réduit

On appelle *graphe réduit* (ou *graphe des composantes*) d'un graphe orienté $G = (V, E)$, le graphe $G' = (V', E')$, où :
- les sommets de V' correspondent aux composantes fortement connexes de G ;
- E' contient l'arc (U, V) si et seulement s'il existe dans G un arc d'un sommet $u \in U$ vers un sommet $v \in V$.

Exercice 6 :

Représenter le graphe réduit du graphe de l'exo 1 et celui de la figure 1.

Exercice 7 :

Montrer que si C et D sont deux composantes fortement connexes d'un graphe quelconque, alors il existe un chemin entre un sommet *quelconque* $u \in C$ et un sommet *quelconque* $v \in D$ si et seulement s'il existe un chemin entre un sommet *fixé* $u_0 \in C$ et un sommet *fixé* $v_0 \in D$.

Exercice 8 :

Utiliser l'exo précédent pour montrer que le graphe réduit d'un graphe orienté est toujours acyclique.

Exercice 9 :

Pour résoudre un problème du genre de celui de l'exo 1, que convient-il de faire une fois le graphe réduit calculé ?

Exercice 10 :

Écrire un algorithme qui construit le graphe réduit d'un graphe orienté. Montrer que le graphe obtenu est bien le graphe réduit (en particulier, montrer qu'il existe au plus un arc entre deux sommets du graphe réduit).