Algorithmique — Maîtrise
TD 1 : Parcours de graphes

Isabelle Fagnot, Mihaela Sighireanu, Yan Jurski, Olivier Serre

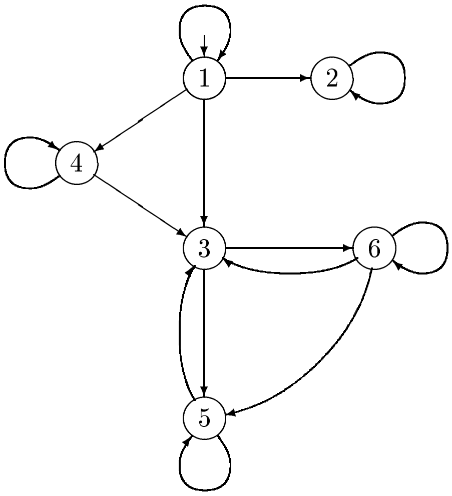


Fig. 1 – Un graphe orienté

Exercice 1 : Donner une représentation du graphe de la figure 1 au moyen d'une liste d'adjacence, puis au moyen d'une matrice d'adjacence.

Exercice 2 : Appliquer à ce graphe l'algorithme de parcours en largeur (le sommet origine est indiqué par une simple flèche entrante). Le résultat sera présenté sur un schéma dans lequel les sommets de profondeur égale seront mis à la même hauteur, le sommet origine étant mis en haut.

Exercice 3 : Appliquer au même graphe l'algorithme de parcours en profondeur. Le résultat sera présenté sous la forme d'une arborescence en profondeur, en distinguant les arcs de liaisons des autres types d'arcs.

Exercice 4 : Donner une version recursive du Parcours en Profondeur. (Remarquez qu'on ne vous a pas demandé une version recursive du parcours en largeur.)

Exercice 5 : Comparer le temps d'exécution des parcours selon qu'on utilise une représentation par liste d'adjacence ou par matrice d'adjacence.

Exercice 6 : Modifiez l'algorithme de parcours en largeur pour qu'il calcule la profondeur de chaque sommet.

Exercice 7 : Combien y a-t-il de circuits simples dans le graphe de sommets $V = \{v_i, s_i, t_i\}, i \in [0..n-1]$ et d'arcs $E = \{(v_i, s_i), (v_i, t_i), (s_i, v_j), (t_i, v_j)$ avec $j = 1 + i \ mod \ n\}, i \in [0..n-1]$?

Exercice 8 : [Fil d'ariane]

On ne peut parler de l'histoire du Minotaure sans parler du roi Minos qui fut à l'origine de son enfermement dans un labyrinthe réputé inviolable. Voici donc l'histoire de Minos et du labyrinthe du Minotaure.

Minos était le fils de Zeus et d'Europe. Il demanda à Poséidon une offrande pour un sacrifice digne de lui, et le dieu fit sortir de la mer un magnifique taureau. L'animal était d'une telle beauté qu'il décida de ne pas le sacrifier. Malheureusement pour lui, sa femme, Pasiphaé, fille d'Hélios, tomba amoureuse du taureau et l'ingénieux Dédale, construisit un simulacre de vache sur sa demande dans lequel elle se cacha ; ainsi elle fut montée par le taureau.

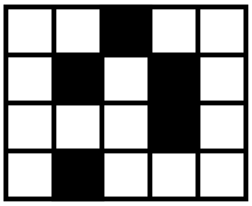
Toujours est-il, que Pasiphaé eut tout de même de nombreux enfants de Minos dont une fille du nom d'Ariane. Puis elle donna naissance à un monstre, fils du taureau, qui avait le corps d'un homme et la tête d'un taureau. Il fut nommé " le Minotaure" c'est à dire le taureau de Minos.

Minos, très contrarié demanda à Dédale de construire un labyrinthe pour pouvoir enfermer le monstre. Tous les neuf ans il faisait donner en sacrifice au Minotaure 7 jeunes garçons et 7 jeunes filles destinés à le nourrir. L'oracle de Delphes avait déclaré que seul le paiement de ce tribut pourrait délivrer de la peste la ville d'Athènes. Peste, que Minos avait fait soit disant apparaître contre elle car il lui en voulait pour la mort d'un de ses enfants.

Plus tard, Thésée vint en Crète, faisant partie des victimes destinées au Minotaure. Il tua le monstre et enleva Ariane, la fille de Minos qui l'avait aidé. Dédale prit d'ailleurs part à cet exploit car c'est lui qui eut l'idée du peloton de fil grâce auquel Thésée put s'échapper du labyrinthe. Pour le punir, Minos l'y enferma avec son fils Icare. Dédale trouva un moyen pour s'en échapper en fabriquant des ailes avec de la cire et des plumes, tous deux s'envolèrent, mais Icare mourut en tombant.

Bref ... Voici l'exo.

On représente un labyrinthe sous la forme d'une matrice (n, m), où les cases sont remplies par des espaces ou des murs.



1. On veut transformer cette matrice en un graphe. Pour cela on donne un numero à chaque case de la matrice, ce qui defini les sommets du graphe. Il y aura un arc entre deux etats si l'on peut passer d'une case à l'autre.
   Construire le graphe associé au labyrinthe de la figure .
2. Ecrire en pseudo langage un algorithme qui effectue cette transformation.
3. Ariane a oublié de donner sa pelotte a Thésée. Est ce que Dédale peut la lui apporter sans rencontrer le Minotaure ?
4. Résoudre cette question directement sur la matrice représentant le labyrinthe, sans passer par la construction du graphe.

Glossaire

arc de liaison arc arrivant sur un sommet qui n'a pas encore été découvert dans un parcours en profondeur (d'un gris vers un blanc)

arc retour (ou en arrière) arc orienté d'un sommet u vers un ancêtre de u, (on remonte d'un gris vers un autre gris au moment ou on colore u en noir).

arc transverse arc « impasse » pour un parcours en profondeur (il est dirigé vers un sommet deja visite, c.a.d non blanc)

circuit chemin d'un graphe orienté dont les sommets de départ et d'arrivée sont identiques

cycle (circuit simple) chemin d'un graphe non orienté ne passant jamais deux fois par un même sommet à l'exception des sommets de départ et d'arrivée, qui sont identiques