Algorithmique – Maîtrise

TD 6 : Algorithme de Floyd Warshall

Isabelle Fagnot, Mihaela Sighireanu, Yan Jurski, Olivier Serre

1 Echauffement

Exercice 1 : J'ai écrit des programmes de conversion entre divers types de représentations de graphes (graphique, par listes d'adjacence, par matrice d'adjacence et par matrice d'incidence). Sur un graphe donné, les temps d'exécutions de mes programmes sont les suivants :
- La conversion d'une représentation graphique vers tous les autres types est implémentée et prend 5 secondes vers les listes d'adjacence, 15 vers une matrice d'adjacence et 50 vers une matrice d'incidence.
- La matrice d'incidence ne peut être convertie qu'en format graphique et cela prend 5 secondes.
- La représentation par listes d'adjacence peut être convertie vers un matrice d'adjacence (5 secondes) ou vers une matrice d'incidence (15 secondes).
- Enfin, une matrice d'adjacence peut être transformée en une matrice d'incidence en 30 secondes et en listes d'adjacence en 15 secondes.

On s'intéresse au problème suivant : étant donnés deux types de représentations, quel est le temps minimum de conversion du premier dans le second ?

Modéliser le problème suivant à l'aide d'un graphe, et le résoudre. Comment déterminer la suite de transformations permettant d'obtenir la conversion la plus rapide entre deux représentations ?

2 Algorithme de Floyd-Warshall

Exercice 2 : Peut-on commuter les deux boucles internes avec la boucle externe dans l'algorithme de Floyd-Warshall ?

Exercice 3 : Quelle est la complexité de l'algorithme de Floyd-Warshall ?

Quel est l'espace utilisé au cours d'une exécution de ce dernier ? Peut-on améliorer cette borne ?

3 Réduction transitive

Exercice 4 : Une réduction transitive d'un graphe G est un graphe G' minimal en nombre d'arêtes, et qui a la même clôture transitive que G (mais pas forcément le même nombre d'arêtes).

1. Soit G le graphe de sommets $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et d'arêtes $E = \{(1, 3), (1, 4), (4, 3), (2, 4), (5, 4), (2, 5)\}$. En donner une réduction transitive.

2. Montrer que si G est acyclique sa réduction transitive est unique.
3. Que dire de la réduction transitive d'une composante fortement connexe ?
4. Ecrire un algorithme de calcul de la clôture transitive d'un graphe.
5. Considérer le graphe de sommets $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et d'arcs $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)(1, 4)\}$ et proposer un algorithme qui calcule la réduction transitive pour les graphes **acycliques**.
6. Prouver que votre algorithme préserve la clôture transitive.
7. Montrer que le graphe résultat de votre algorithme est inclus dans tout graphe de même clôture transitive que G. En déduire la correction de votre algorithme.
8. Etendre votre algorithme pour prendre en compte les graphes non nécessairement acycliques.
9. Quelle est sa complexité ?

4 Floyd-Warshall, suite

Exercice 5 : Modifier l'algorithme de Floyd-Warshall de manière à ce que les chemins trouvés soient non seulement de poids minimaux mais aussi de longueurs minimales.