Algorithmique — Maîtrise
TD 0 : Graphes et représentation

Isabelle Fagnot, Mihaela Sighireanu, Yan Jurski, Olivier Serre

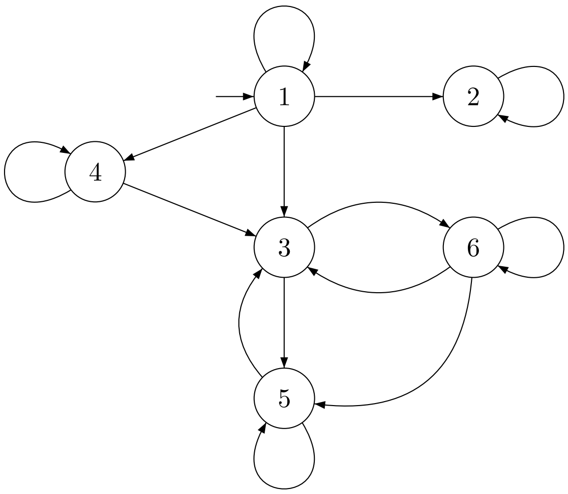

FIG. 1 – Un graphe orienté

Exercice 1 : Donner une représentation du graphe de la figure 1 au moyen d'une liste d'adjacence, puis au moyen d'une matrice d'adjacence.

Exercice 2 : Quels sont les avantages et inconvénients d'une représentation par une liste d'adjacence ? par une matrice d'adjacence ?

Exercice 3 : Etant donnée une représentation d'un graphe par une liste d'adjacence, quel temps faut-il pour calculer le degré sortant d'un sommet ? Même question pour le degré entrant.

Exercice 4 : Combien y a-t-il de circuits simples dans le graphe de sommets $V = \{v_i, s_i, t_i\}, i \in [0..n-1]$ et d'arcs $E = \{(v_i, s_i), (v_i, t_i), (s_i, v_j), (t_i, v_j) \text{ avec } j = 1 + i \text{ } mod \text{ } n\}, i \in [0..n-1]$?

Exercice 5 : Considérons un graphe orienté $G = (V, E)$. Un sommet v est un *puis* s'il est de degré entrant $|V| - 1$ et de degré sortant 0. Etant donnée une représentation d'un graphe $G = (V, E)$ par une matrice d'adjacence, proposer un algorithme très naïf, c'est à dire fonctionnant en temps $\mathcal{O}(|V|^2)$, permettant de déterminer s'il existe un puis.

Comment faire mieux ?

Exercice 6 : Considérons un graphe $G = (V, E)$ sans boucle triviale. On appelle matrice d'incidence du graphe G, la matrice à $|V|$ lignes et $|E|$ colonnes, $B = (b_{i,j})$ définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si l'arête } j \text{ part du sommet } i \\ 1 & \text{si l'arête } j \text{ arrive dans sommet } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

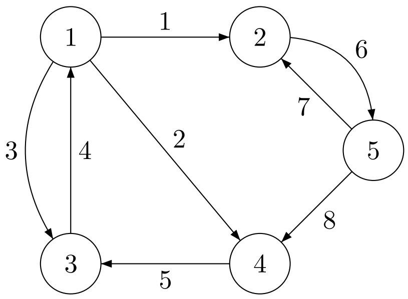

FIG. 2 – Un graphe orienté sans boucle triviale avec des arêtes indicées

1. Donner la matrice d'incidence du graphe représenté dans la figure 2.
2. Comment calculer le degré sortant et le degré entrant d'un sommet dans une telle représentation ?
3. Proposer un algorithme de construction de la matrice d'incidence à partir de la liste d'adjacence d'un graphe ou de sa matrice d'adjacence.
4. Si B^T désigne la transposée de B, que représentent les entrées de la matrice BB^T ?

Exercice 7 : Un passeur se trouve au bord d'une rivière avec un loup, une chèvre et une salade. Comme vous le savez probablement, les loup mangent les chèvres mais pas les salades, les chèvres mangent les salades mais pas les loups, et les salades ne mangent personne. Dans sa barque, le passeur ne peut transporter qu'un seul des trois protagonistes à la fois. Lorsqu'il est dans sa barque ou sur la rive opposée, il ne peut empêcher de carnage alimentaire. On souhaite savoir s'il peut amener, sains et saufs, de l'autre côté de la rive le loup, la chèvre et la salade. Si cela est possible, combien de traversées sont nécessaires ?

Pour répondre à ce problème, vous en donnerez une modélisation par un graphe, et le reformulerez dans ce cadre.

Exercice 8 : Des étudiants A, B, C, D, E et F doivent passer des examens dans différentes disciplines, chaque examen occupant une demi-journée :

- Algorithmique : étudiants A et B.
- Compilation : étudiants C et D.
- Bases de données : étudiants C, E, F et G.
- Java : étudiants A, E, F et H.
- Architecture : étudiants B, F, G et H.

On cherche à organiser la session d'examen la plus courte possible.

Pour répondre à ce problème, vous en donnerez une modélisation par un graphe, et le reformulerez dans ce cadre.

Glossaire

circuit chemin d'un graphe orienté dont les sommets de départ et d'arrivée sont identiques

cycle (circuit simple) chemin d'un graphe non orienté ne passant jamais deux fois par un même sommet à l'exception des sommets de départ et d'arrivée, qui sont identiques