Concurrence – Master 1
TD 1 : Logique des programmes

Exercice 1 : Pour chacune des phrases suivantes, indiquez quel type de propriété (sûreté ou vivacité) elle exprime en identifiant bien la partie qui y est interessante :

1. Au plus 5 personnes doivent sont dans l'ascenseur à un moment donné.
2. Les patrons sont servis dans l'ordre de leur arrivée.
3. Le coût de la vie ne décroît jamais.
4. Deux choses sont certaines : la mort et les taxes.
5. Toute bonne chose a une fin.
6. Une livre s'améliore à chaque lecture.
7. Ce qui croit doit décroître.
8. Si deux processus attendent pour leur section critique, au moins un va y entrer.
9. Au plus une personne doit parler à un moment, les autres écoutent.
10. Un philosophe affamé margera.
11. Si une interruption arrive, alors un message sera affiche dans une seconde.

Exercice 2 : Le système PQ est un SFL définit comme suit :

Symboles : P, Q, -

Formules : a P b Q c, où a,b et c sont zéro ou plusieurs -

Axiomes : - P - Q - - et - - P - Q - - -

Règle d'inférence : où a,..., f sont zéro ou plusieurs -

$$\frac{aPbQc, dPeQf}{adPbeQcf}$$

1. Donnez une preuve du théorème - - - P - - Q - - - - -
2. Indiquez pourquoi - - P - Q - - n'est pas un théorème
3. Considérez l'interprétation suivante : Une formule a P b Q c est vraie si $\|a\| + \|b\| = \|c\|$. Est-ce logique valide pour cette interprétation ? Est-elle complète ?
4. Pareil pour l'interprétation : Une formule a P b Q c est vraie si $\|a\| * |b| + 1 = \|c\|$.

Exercice 3 : Donnez une preuve des théorèmes $\{P\}\ S\ \{Q\}$ pour le programme suivant :

$\{\ P\ :\ i\ >\ 0\ \wedge\ j\ >\ 0\ \}$
```
q = 0; r = i;
do
 :: j <= r -> q=q+1; r=r-j
od
```
$\{\ Q\ :\ i = q * j + r\ \wedge\ r\ \geq\ 0\ \}$

Correction 1 : Rappel :
- propriété de sûreté : rien de mal va se passer
- propriété de vivacité : quelque chose de bien forcement arrivera

Doc, la réponse est :

1. sûreté : l'état mauvais à éviter est quand plus de 5 personne montent
2. vivacité : les patrons seront servis ; sûreté : la séquence mauvaise est un ordre différent de FIFO
3. sûreté : la séquence mauvaise serait une augmentation du coût
4. vivacité : quelque chose est inévitable
5. vivacité : pareil
6. sûreté : la séquence mauvaise serait après une lecture, une détérioration
7. vivacité : quelque chose est inévitable
8. sûreté : l'état mauvais serait que les deux processus se trouvent dans la section critique
9. sûreté : l'état mauvais serait que plusieurs se mettent a parler
10. vivacité : quelque chose de bon arrivera forcement
11. sûreté : l'état mauvais serait que le message ne soit pas affiche dans ce delai

Correction 2 :

1. On applique une fois la règle d'inférence sur les axiomes.
2. La règles d'inférence augmente le nombre de - entre P et Q et ce nombre est égal à une dans les axiomes. Comme - - P - Q - - n'est pas un axiome, il resulte qu'il ne peut pas être obtenu en appliquant la règles d'inférence.
3. La logique est valide pour cette interprétation car :
   - les axiomes sont tranformées en formules vraies (1+1=2 et 2+1=3)
   - la règles d'inférence génère des théorèmes vraies dans cette interprétation si ses hypothèses sont vraie dans l'interprétation, c'est-à-dire :

   $$(\|a\| + \|b\| = \|c\| \ \wedge \ \|d\| + \|e\| = \|f\|) \Rightarrow (\|a\| + \|d\|) + (\|b\| + \|e\|) = (\|c\| + \|f\|)$$

   Par contre, elle n'est pas complète car on peut trouver une formule (-PQ-) valide par l'interpétation (1+0=1) mais qui n'est pas un théorème de la logique PQ.
4. La logique n'est ni valide, ni complète pour cette deuxième interpération.

Correction 3 : Ce programme calcule le quotient et le reste de la division de i par j. Le résumé de la preuve est :

```
{ P : i > 0 & j > 0 }
q = 0; r = i;
{ I : P & Q }
do
 :: j <= r -> { I & j <= r }
              q=q+1;
              { P & i=q*j - j + r & r >= 0 & j <= r }
```

```
              r=r-j
              { I }
od
{ I & j > r }
{ Q : i=q*j+r & r >= 0 }
```

La preuve complète est (longue !) :

1. $\{P \wedge 0 = 0\}$ Axiome affectation
   $q = 0$
   $\{P \wedge q = 0\}$
2. $(P \wedge 0 = 0) = P$ Tautologie logique des prédicats
3. $\{P\}$ Règle de la Conséquence sur 1 et 2
   $q = 0$
   $\{P \wedge q = 0\}$
4. $\{P \wedge q = 0 \wedge i = i\}$ Axiome affectation
   $r = i$
   $\{P \wedge q = 0 \wedge r = i\}$
5. $(P \wedge q = 0 \wedge i = i) = (P \wedge q = 0\}$ Tautologie logique des prédicats
6. $\{P \wedge q = 0\}$ Règle de la Conséquence sur 4 et 5
   $r = i$
   $\{P \wedge q = 0 \wedge r = i\}$
7. $\{P\}$ Règle de la Séquence sur 3 et 6
   $q = 0; r = i$
   $\{P \wedge q = 0 \wedge r = i\}$
8. $(P \wedge q = 0 \wedge r = i) \Rightarrow (P \wedge Q\}$ Tautologie logique des prédicats
9. $\{P\}$ Règle de la Conséquence sur 7 et 8
   $q = 0; r = i$
   $\{I : P \wedge Q\}$
10. $\{P \wedge i = (q + 1) * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r\}$ Axiome affectation
    $q = q + 1$
    $\{P \wedge i = q * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r\}$
11. $(P \wedge i = (q + 1) * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r\} = (P \wedge Q \wedge j \leq r\}$ Tautologie logique des prédicats et arithmetique
12. $\{P \wedge Q \wedge j \leq r\}$ Règle de la Conséquence sur 10 et 11
    $q = q + 1$
    $\{P \wedge i = q * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r\}$
13. $\{P \wedge i = q * j - j + r \wedge r - j \geq 0\}$ Axiome affectation
    $r = r - j$
    $\{I : P \wedge i = q * j + r \wedge r \geq 0\}$
14. $(P \wedge i = q * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r) \Rightarrow (P \wedge i = q * j - j + r \wedge r - j \geq 0)$ Tautologie logique des prédicats et arithmetique

15. $\{P \wedge i = q * j - j + r \wedge r \geq 0 \wedge j \leq r\}$ Règle de la Conséquence sur 13 et 14
$r = r - j$
$\{I : P \wedge i = q * j - j + r \wedge r \geq 0\}$

16. $\{I \wedge j \leq r\}$ Règle de la Séquence sur 12 et 15
$q = q + 1; r = r - j$
$\{I\}$

17. $\{I\}$ Règle de l'Itération sur 16
do $:: j \leq r \rightarrow q = q + 1; r = r - j$ **od**
$\{I \wedge j > r\}$

18. $(P \wedge Q \wedge j > r) \Rightarrow Q$ Tautologie logique des prédicats

19. $\{P\}...\{Q\}$ Règle de la Séquence sur 9 et 18
q.e.d.