Rigidity Theorems and Structure Thms applied to combinatorics

$$\mathcal{C}^{\otimes} \longrightarrow gr\,\mathcal{C}$$

$$M \longmapsto (M(n))_{n\geq 0} \quad \text{ou} \quad \coprod_{n\geq 0} M(n) \quad \text{ou} \quad \prod_{n\geq 0} M(n)$$

But compter

Séries Génératrices

		$\otimes^{gr}$	$\boxtimes^{gr}$
$gr\,\mathcal{C}$	$\sum d_n^M x^n$	x	o
$\mathcal{C}^{\otimes}$	$\sum \frac{d_n^M}{n!} x^n$	x	o
		$\otimes$	$\boxtimes$

→ dualité de Koszul

→ Opérade défini par générateurs et relations

→ Opérade Symétrique $\xrightarrow{\text{pont}}$ Opérade Non Symétrique

As — As = *

Opérade Symétrique	Opérade Non Symétrique
$P \boxtimes P \to P$	$P \boxtimes^{gr} P \to P$
$P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$	$P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
$M \mapsto P(M) = \coprod_{n\geq 1} P(n) \otimes_{\Sigma_n} M^{\otimes n}$	$M \mapsto P(M) = \coprod_{n\geq 0} P(n) \otimes M^{\otimes n}$
alg sur la monade des arbres	alg sur la monade des arbres planaires.
$P(1) = \coprod_{n\geq 1} P(n)/\Sigma_n$.	$P(1) = \coprod_{n\geq 1} P(n)$

Structure - Rigidité $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ triple

Hopf

ex $(\mathcal{C}om, \mathcal{C}om, \mathcal{V}ect)$ Borel-Leray $S(V)$

ex. $(\mathcal{C}om, \mathcal{A}s, \mathcal{L}ie)$ Cartier-Milnor-Moore

Hopf

aujourd'hui

- Opérades des surjections
  - Cas E_2 Burgunder-Ronco
  - Cas E_n Mario Gonçalves-Lamas
- m-Dyck path.

Hopf Operads

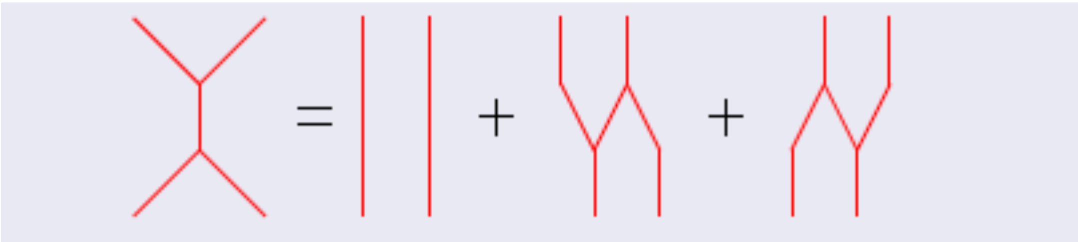
$\{$ comm et cocomm Hopf algebras $\}$ $\longleftrightarrow$ $\{$ Vect $\}$

$(S(V)$, concat, unshuffle$)$ $\longleftarrow\!\shortmid$ V

Loday Ronco $\{$ alg de Hopf u.i $\}$ $\longleftrightarrow$ $\{$ Vect $\}$

$(T(V)$, concat, deconcat$)$ $\longleftarrow\!\shortmid$ V

u.i



$\longrightarrow$ Applications • alg de Hopf combinatoires.

Se généralise $\longrightarrow$ Loi distributive entre monades et comonades

$\longrightarrow$ T^{op} symétrique est-elle libre en tant qu'opérade non symétrique ?

$\longrightarrow$ $(\mathrm{Brn}, \mathrm{Brn}, \mathrm{Vect})$ — χ Hopf

$(\mathrm{As}, \mathrm{As}, \mathrm{Vect})$ — u.i

$(\mathrm{NAP}, \mathrm{PreLie}, \mathrm{Vect})$ — λ

$\longrightarrow$ $(Q \rightleftarrows P, \mathrm{Vect})$ $\Longrightarrow$ Rigidité

espèce Q = espèce P

Burgunder

Delcroix-Oger

(loi de confluence)

avec Mesablishvili et Wisbauer...

$$\begin{tikzcd}
H^2 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "H\delta"'] & H \arrow[r, "\delta"] & H^2 \\
H^3 \arrow[rr, "\lambda H"'] & & H^3 \arrow[u, "Hm"']
\end{tikzcd}$$

On dit que λ est compatible.

$M^2 \xrightarrow{\mu} M$

$G \xrightarrow{\delta} G^2$

$MG \xrightarrow{\lambda} GM$

Si x est une M-alg $Mx \xrightarrow{h} x$

Gx aussi

$MGx \xrightarrow{\lambda} GMx \xrightarrow{h} Gx$

Si $M = G = H$ on définit la notion de H-λ-bigèbre.

λ compatible $\Longleftrightarrow$
$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "He"] \arrow[rr, bend right, "\delta"'] & H^2 \arrow[r, "\lambda"] & H^2
\end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow$
$$\begin{tikzcd}
H^2 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend right, "m"'] & H^2 \arrow[r, "H\varepsilon"] & H
\end{tikzcd}$$

<u>Thm</u> Si λ est compatible alors il y a une équivalence de catégories

$\{\text{Vect}\} \longleftrightarrow \{H\lambda\text{-bigèbres}\}$

Ex

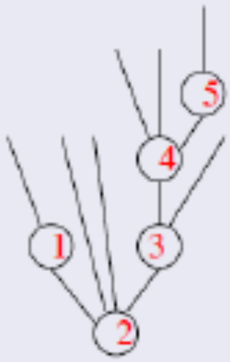
Monade			Comonade		
TT	$\to$	T	T	$\to$	TT
$\otimes$	$\mapsto$	$\otimes$	$\otimes$	$\mapsto$	$\otimes + \otimes$
$\otimes$	$\mapsto$	$\otimes$			
Algèbre associative			Cogèbre coassociative		

$$\lambda_{ui} \quad \begin{array}{ccc} TT & \to & TT \\ \otimes & \mapsto & \otimes + \otimes \\ \otimes & \mapsto & \otimes \end{array}$$

$\longrightarrow$ LR Thm _

Ex2 The Planar Tree monad $\mathbb{PT} \quad grVect \to grVect$
$V \mapsto \mathbb{PT}(V)$

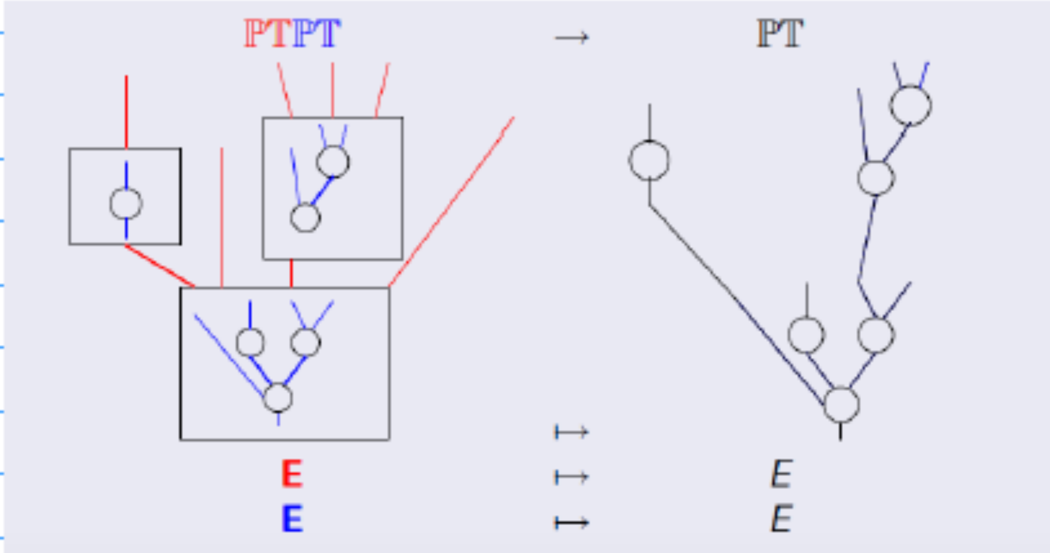
$$t \mapsto V(t)$$



$$\mapsto V_1 \otimes V_4 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_1$$

$$\mathbb{PT}(V) = \bigoplus_{t \in PT} V(t).$$

graded by PT_n planar trees with n leaves



"ancestrality"

Monade			Comonade			Loi distributive		
$\mathbb{PT}\mathbb{PT}$	$\to$	$\mathbb{PT}$	$\mathbb{PT}$	$\to$	$\mathbb{PT}\mathbb{PT}$	$\mathbb{PT}\mathbb{PT}$	$\to$	$\mathbb{PT}\mathbb{PT}$
E	$\mapsto$	**E**	**E**	$\mapsto$	**E** + **E**	**E**	$\mapsto$	**E** + **E**
E	$\mapsto$	**E**				**E**	$\mapsto$	**E**
Opérade non sym.			Coopérade non sym					

<u>Thm</u> (L) Let $\mathcal{P}$ be a nsym operad if $\mathcal{P}$ is a u.i 'bi-operad' (operad + coop + Δ u.i) then $\mathcal{P}$ is free as a ns operad

<u>ex</u> Lie, preLie ... see Dotsenko (freeness thms for operads via Gröbner bases 2011)

<u>Trick</u> $\mathcal{P}$ a Hopf operad, multiplicative $As \to \mathcal{P}$
(example As, Zinbiel)
gives rise to $\mathcal{P}$ Hopf algebra in Species.
$(H, \mu, \Delta) \in$ Species $\longrightarrow (H, \vec{\mu}, \bar{\Delta})$ Stover
Patras-Reutenauer
$\searrow (H, \bar{\mu}, \vec{\Delta})$ Livernet
$(H, \bar{\mu}, \bar{\Delta})$ is
$\boxed{\text{u.i}}$.
$\Rightarrow (H, \bar{\Delta})$ cofree
$\Rightarrow (H, \bar{\mu})$ free

<u>Ex</u> $\mathcal{P} = As$

$\sigma = (2, \boxed{3}, 1, 4) \quad \tau = (2, 3, 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma \circ_2 \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 4, 5, 3, 1, 6)$$

$\to (H, \vec{\mu}, \bar{\Delta})$
is Malvenuto-Reut
$\Rightarrow$ cofree.

$\mathcal{P} = \mathcal{Z}in$

A Zinbiel algebra satisfies the relation

$$(ab)c = a(bc) + a(cb).$$

It is a "Hopf operad" and there is a morphism $\mathcal{C}om \to \mathcal{Z}in$.

Lemma (L.)

$\mathcal{P} = \mathcal{Z}in$ gives a twisted commutative Hopf algebra $(\oplus_n K[S_n], m, D)$. The Hopf algebra $(\oplus_n K[S_n], \bar{m}, \hat{D})$ is the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra. It is free associative.