Le formalisme des espèces : exemples et applications aux structures algébriques

Dominique Manchon
LMBP, CNRS-Université Clermont-Auvergne

SOCS 2020, IRIF,
10 décembre 2020

La langue de l'Europe, c'est la traduction

Barbara Cassin, de l'Académie Française

Définition (A. Joyal)

Soit $\mathcal{F}$ le groupoïde des ensembles finis, i.e. la catégorie des ensembles finis avec les bijections comme morphismes. Une espèce covariante (resp. contravariante) $\mathbb{E}$ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$) vers une **catégorie monoïdale** $\mathcal{C}$.

- On se placera dans le cas *contravariant* dans un premier temps. L'espèce $\mathbb{E}$ est donc la donnée d'un objet $\mathbb{E}_X$ de $\mathcal{C}$ pour tout ensemble fini X, et d'un morphisme $\mathbb{E}_\varphi : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ pour toute bijection $\varphi : X \to Y$.

- On se placera dans le cas *contravariant* dans un premier temps. L'espèce $\mathbb{E}$ est donc la donnée d'un objet $\mathbb{E}_X$ de $\mathcal{C}$ pour tout ensemble fini X, et d'un morphisme $\mathbb{E}_\varphi : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ pour toute bijection $\varphi : X \to Y$.
- La fonctorialité de $\mathbb{E}$ s'écrit

$$\mathbb{E}_{\psi\circ\varphi} = \mathbb{E}_\varphi \circ \mathbb{E}_\psi$$

pour toute chaîne

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

- On se placera dans le cas *contravariant* dans un premier temps. L'espèce $\mathbb{E}$ est donc la donnée d'un objet $\mathbb{E}_X$ de $\mathcal{C}$ pour tout ensemble fini X, et d'un morphisme $\mathbb{E}_\varphi : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ pour toute bijection $\varphi : X \to Y$.
- La fonctorialité de $\mathbb{E}$ s'écrit

$$\mathbb{E}_{\psi\circ\varphi} = \mathbb{E}_\varphi \circ \mathbb{E}_\psi$$

pour toute chaîne

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \quad \text{induisant} \quad \mathbb{E}_Z \xrightarrow{\mathbb{E}_\psi} \mathbb{E}_Y \xrightarrow{\mathbb{E}_\varphi} \mathbb{E}_X.$$

- On se placera dans le cas *contravariant* dans un premier temps. L'espèce $\mathbb{E}$ est donc la donnée d'un objet $\mathbb{E}_X$ de $\mathcal{C}$ pour tout ensemble fini X, et d'un morphisme $\mathbb{E}_\varphi : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ pour toute bijection $\varphi : X \to Y$.
- La fonctorialité de $\mathbb{E}$ s'écrit

$$\mathbb{E}_{\psi\circ\varphi} = \mathbb{E}_\varphi \circ \mathbb{E}_\psi$$

pour toute chaîne

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \quad \text{induisant} \quad \mathbb{E}_Z \xrightarrow{\mathbb{E}_\psi} \mathbb{E}_Y \xrightarrow{\mathbb{E}_\varphi} \mathbb{E}_X.$$

- En particulier, tout objet $\mathbb{E}_X$ est muni d'une action *à droite* du groupe S_X des permutations de l'ensemble fini X.

- Un **morphisme d'espèces** $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une transformation naturelle du foncteur $\mathbb{E}$ vers le foncteur $\mathbb{F}$.

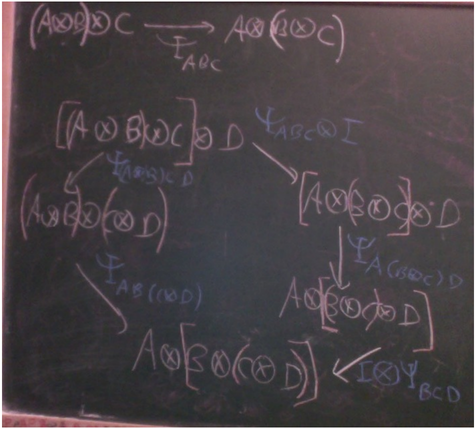
- Un **morphisme d'espèces** $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une transformation naturelle du foncteur $\mathbb{E}$ vers le foncteur $\mathbb{F}$.
- Concrètement, c'est la donnée d'un $\mathcal{C}$-morphisme $\alpha_X : \mathbb{E}_X \to \mathbb{F}_X$ pour tout ensemble fini X, faisant commuter le diagramme

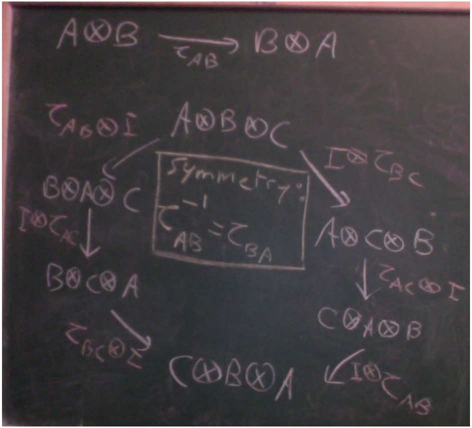
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_Y \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "\mathbb{E}_\varphi"'] & \mathbb{F}_Y \arrow[d, "\mathbb{F}_\varphi"] \\
\mathbb{E}_X \arrow[r, "\alpha_X"'] & \mathbb{F}_X
\end{tikzcd}$$

pour toute bijection $\varphi : X \to Y$.

- Une **catégorie monoïdale symétrique** $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets et de morphismes vérifiant les axiomes d'une catégorie, ainsi qu'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ vérifiant des conditions naturelles de symétrie, d'associativité et de commutativité.

- Une **catégorie monoïdale symétrique** $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets et de morphismes vérifiant les axiomes d'une catégorie, ainsi qu'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ vérifiant des conditions naturelles de symétrie, d'associativité et de commutativité.
- On demande l'existence d'un objet $\mathbf{1}$ (unique à isomorphisme près) tel que pour tout objet A on ait $A \otimes \mathbf{1} \simeq \mathbf{1} \otimes A \simeq A$.





Equations du pentagone et de l'hexagone
L'hexagone du tableau de droite devrait en toute rigueur être un dodécagone.

Exemples canoniques de catégories monoïdales symétriques

- La catégorie des ensembles : $\otimes = \times$ (produit cartésien).
- La catégorie des espaces vectoriels sur un corps **k**: $\otimes$ est le produit tensoriel usuel.
- La catégorie des espèces sur une catégorie monoïdale symétrique (voir plus loin).

- On demande souvent qu'une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ possède **des petites limites et des petites colimites compatibles avec la structure monoïdale**.

- Cela implique notamment que pour toute collection $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble I, il existe deux objets produit et coproduit

$$\prod_{i\in I} A_i, \qquad \coprod_{i\in I} A_i, \qquad \text{tels que}$$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\iota_i"'] \arrow[drr, dotted] \arrow[drrr, "f_i"] & & & \\
\coprod_{i\in I} A_i \arrow[rr, squiggly] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & & C \arrow[r, dotted] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "g_i"] & & \\
P \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, dotted, bend right] & \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

- Cela implique notamment que pour toute collection $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble I, il existe deux objets produit et coproduit

$$\prod_{i\in I} A_i, \qquad \coprod_{i\in I} A_i, \qquad \text{tels que}$$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\iota_i"'] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "f_i"] & & \\
\coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, bend right, "f"'] & C \arrow[r, dotted] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "g_i"] & & \\
P \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, dotted, bend right] & \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

- On demande

$$\left(\coprod_{i\in I} A_i\right) \otimes \left(\coprod_{j\in J} A_i\right) = \coprod_{(i,j)\in I\times J} A_i \otimes B_j.$$

- On demande l'existence d'un objet **0** (unique à isomorphisme près) tel que pour tout objet A on ait $A \otimes \mathbf{0} \simeq \mathbf{0} \otimes A \simeq 0$, ce qui implique
$$\mathbf{0} \sqcup A \simeq A \sqcup \mathbf{0} \simeq \mathbf{0}.$$
- Dans la catégorie des ensembles, $\sqcup$ est l'union disjointe, $\prod$ est le produit cartésien, avec $\mathbf{1} = \{*\}$ et $\mathbf{0} = \varnothing$.
- Dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbf{k}$, le coproduit $\sqcup$ est la somme directe et $\prod$ est le produit, avec $\mathbf{1} = \mathbf{k}$ et $\mathbf{0} = \{0\}$. La somme directe et le produit ne coïncident pas lorsque l'ensemble d'indices est infini.

Produit monoïdal non-ordonné

On suppose que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est **stricte**. Soit $(A_i)_{i\in X}$ une collection d'objets de $\mathcal{C}$ indexés par un ensemble fini X. Le **produit monoïdal des** A_i est défini par

$$\bigotimes_{i\in X} A_i := \left(\coprod_{\varphi\in\mathcal{F}(X,[n])} A_{\varphi_1}\otimes\cdots\otimes A_{\varphi_n} \right) \Big/ \sim,$$

où le quotient s'entend pour l'action naturelle du groupe S_n. Pour définir cet objet rigoureusement dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, la notion de "petite limite" entre en jeu.

- Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, la correspondance $X \mapsto A^{\otimes X}$ est une **espèce covariante** : toute bijection $\varphi : X \to Y$ induit fonctoriellement $A^{\otimes\varphi} : A^{\otimes X} \to A^{\otimes Y}$.

- Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, la correspondance $X \mapsto A^{\otimes X}$ est une **espèce covariante** : toute bijection $\varphi : X \to Y$ induit fonctoriellement $A^{\otimes\varphi} : A^{\otimes X} \to A^{\otimes Y}$.
- on obtient alors une espèce contravariante $\mathbb{E}(A)$ définie par

$$\mathbb{E}(A)_X := \mathcal{C}(A^{\otimes X}, A).$$

- Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, la correspondance $X \mapsto A^{\otimes X}$ est une **espèce covariante** : toute bijection $\varphi : X \to Y$ induit fonctoriellement $A^{\otimes\varphi} : A^{\otimes X} \to A^{\otimes Y}$.
- on obtient alors une espèce contravariante $\mathbb{E}(A)$ définie par

$$\mathbb{E}(A)_X := \mathcal{C}(A^{\otimes X}, A).$$

- L'espèce $\mathbb{E}(A)$ est une **opérade**. Nous reviendrons sur ce point.

Opérations sur les espèces

- Coproduit : pour tout ensemble fini X,

$$(\mathbb{E} \sqcup \mathbb{F})_X := \mathbb{E}_X \sqcup \mathbb{F}_X.$$

L'élément neutre est l'espèce nulle $\mathbb{O}$ définie par $\mathbb{O}_X := \mathbf{0}$ pour tout X fini.

Opérations sur les espèces

- Coproduit : pour tout ensemble fini X,

$$(\mathbb{E} \sqcup \mathbb{F})_X := \mathbb{E}_X \sqcup \mathbb{F}_X.$$

  L'élément neutre est l'espèce nulle $\mathbb{O}$ définie par $\mathbb{O}_X := \mathbf{0}$ pour tout X fini.

- Produit monoïdal :

$$(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F})_X := \bigsqcup_{Y \sqcup Z = X} \mathbb{E}_Y \otimes \mathbb{F}_Z.$$

  Le neutre est l'espèce $\mathbb{1}$ définie par $\mathbb{1}_\emptyset = \mathbf{1}$ et $\mathbb{1}_X = \mathbf{0}$ si $X \neq \emptyset$.

Opérations sur les espèces

- Coproduit : pour tout ensemble fini X,
$$(\mathbb{E} \sqcup \mathbb{F})_X := \mathbb{E}_X \sqcup \mathbb{F}_X.$$
L'élément neutre est l'espèce nulle $\mathbb{O}$ définie par $\mathbb{O}_X := \mathbf{0}$ pour tout X fini.
- Produit monoïdal :
$$(\mathbb{E} \otimes \mathbb{F})_X := \bigsqcup_{Y \sqcup Z = X} \mathbb{E}_Y \otimes \mathbb{F}_Z.$$
Le neutre est l'espèce $\mathbb{1}$ définie par $\mathbb{1}_\emptyset = \mathbf{1}$ et $\mathbb{1}_X = \mathbf{0}$ si $X \neq \emptyset$.
- Composition :
$$(\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{F})_X := \bigsqcup_{\pi \text{ partition de } X} \mathbb{E}_\pi \otimes \bigotimes_{b \in \pi} \mathbb{F}_b.$$
Le neutre est l'espèce $\mathbb{I}$ définie par $\mathbb{I}_{\{*\}} = \mathbf{1}$ et $\mathbb{I}_X = \mathbf{0}$ si $|X| \neq 1$.

Monoïdes, comonoïdes, bimonoïdes, monoïdes de Hopf

d'après M. Aguiar et S. Mahajan

- Un **monoïde** est une espèce $\mathbb{E}$ munie d'une application produit

$$m : \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$

et d'un morphisme

$$u : \mathbb{1} \to \mathbb{E}$$

vérifiant les axiomes d'associativité et d'unité :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \arrow[r, "m \otimes \mathrm{I}"] \arrow[d, "\mathrm{I} \otimes m"'] & \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \arrow[d, "m"] \\
\mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \arrow[r, "m"'] & E
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes \mathbb{E} \arrow[r, "u \otimes \mathrm{I}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \arrow[d, "m"] & \mathbb{E} \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "\mathrm{I} \otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathbb{E} &
\end{tikzcd}$$

- Un **comonoïde** est une espèce $\mathbb{E}$ munie d'une application coproduit

$$\Delta : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$$

et d'un morphisme

$$\varepsilon : \mathbb{E} \to \mathbb{1}$$

vérifiant les axiomes de coassociativité et de co-unité :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} & & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[ll, "\Delta\otimes I"'] \\
\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[u, "I\otimes\Delta"] & & \mathbb{E} \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes\mathbb{E} \arrow[dr, "\sim"'] & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[l, "\varepsilon\otimes I"'] \arrow[r, "I\otimes\varepsilon"] & \mathbb{E}\otimes\mathbb{1} \arrow[dl, "\sim"] \\
& \mathbb{E} \arrow[u, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

- Un **bimonoïde** est un monoïde et un comonoïde vérifiant une compatibilité entre les deux structures : ε et Δ sont des morphismes de monoïdes, ou, de manière équivalente, u et m sont des morphismes de comonoïdes.
- Un **monoïde de Hopf** est un bimonoïde muni d'une application antipode $S : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ telle que ce diagramme commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{I}"] & & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[dr, "m"] & \\
\mathbb{E} \arrow[ur] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr] & & \mathbb{1} \arrow[rr, "u"] & & \mathbb{E} \\
 & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[rr, "\mathrm{I}\otimes S"'] & & \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \arrow[ur, "m"] &
\end{tikzcd}$$

Les foncteurs de Fock

- **Foncteur de Fock total :**

$$\mathcal{K}(\mathbb{E}) := \bigsqcup_{n\geq 0} \mathbb{E}_{[n]},$$

avec $[0] := \emptyset$ et $[n] := \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq 1$.

- **Foncteur de Fock bosonique :**

$$\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{E}) := \bigsqcup_{n\geq 0} \mathbb{E}_{[n]}/S_n,$$

qui s'écrit aussi

$$\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}/\sim$$

où $\sim$ désigne l'identification de deux labellisations différentes.

Soit $\mathbb{E}$ un monoïde de Hopf.

Soit $\mathbb{E}$ un monoïde de Hopf.

- $\mathcal{K}(\mathbb{E})$ est une algèbre de Hopf graduée.

Soit $\mathbb{E}$ un monoïde de Hopf.

- $\mathcal{K}(\mathbb{E})$ est une algèbre de Hopf graduée.
- $\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{E})$ est une algèbre de Hopf commutative graduée.

Soit $\mathbb{E}$ un monoïde de Hopf.

- $\mathcal{K}(\mathbb{E})$ est une algèbre de Hopf graduée.
- $\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{E})$ est une algèbre de Hopf commutative graduée.

Pour le voir, il suffit d'appliquer les foncteurs $\mathcal{K}$ et $\overline{\mathcal{K}}$ aux diagrammes. La commutativité du produit dans $\overline{\mathcal{K}}(\mathbb{E})$ provient des isomorphismes entre $A \otimes B$ et $B \otimes A$ dans $\mathcal{C}$.

Deux exemples de monoïdes de Hopf

(F. Fauvet, L. Foissy, DM)

- **L'espèce des espaces topologiques finis :** $\mathbb{T}_X$ est l'espace vectoriel (sur un corps **k**) librement engendré par les quasi-ordres sur X, ou encore les topologies sur X. Le produit est donné par la réunion disjointe au sens topologique : W est un ouvert de $X_1 \sqcup X_2$ pour $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ si et seulement si $W \cap X_i$ est un ouvert de X_i pour $\mathcal{T}_i$. Le coproduit est donné par la formule suivante :

$$\Delta(\mathcal{T}) = \sum_{Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}|_{X \setminus Y} \otimes \mathcal{T}|_Y.$$

Deux exemples de monoïdes de Hopf

(F. Fauvet, L. Foissy, DM)

- **L'espèce des espaces topologiques finis :** $\mathbb{T}_X$ est l'espace vectoriel (sur un corps **k**) librement engendré par les quasi-ordres sur X, ou encore les topologies sur X. Le produit est donné par la réunion disjointe au sens topologique : W est un ouvert de $X_1 \sqcup X_2$ pour $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ si et seulement si $W \cap X_i$ est un ouvert de X_i pour $\mathcal{T}_i$. Le coproduit est donné par la formule suivante :

$$\Delta(\mathcal{T}) = \sum_{Y \in \mathcal{T}} \mathcal{T}_{|X \setminus Y} \otimes \mathcal{T}_{|Y}.$$

Tout quasi-ordre $\leq$ sur X définit une topologie $\mathcal{T}_\leq$ par ses **idéaux supérieurs**. Réciproquement, $x \leq_\mathcal{T} y$ ssi tout ouvert pour $\mathcal{T}$ contenant x contient aussi y.

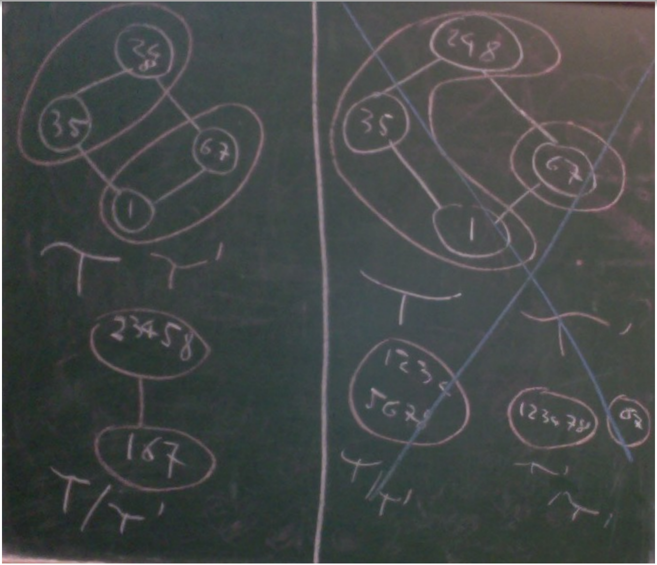
- **L'espèce des posets finis :** $\mathbb{P}_X$ est l'espace vectoriel (sur un corps $\mathbf{k}$) librement engendré par les ordres partiels sur X, ou encore les topologies sur X vérifiant l'axiome T_0 de séparabilité. C'est un sous-monoïde de Hopf du précédent.

- **Coproduit interne** $\Gamma : \mathbb{T}_X \to \mathbb{T}_X \otimes \mathbb{T}_X$ défini par

$$\Gamma(\mathcal{T}) := \sum_{\mathcal{T}' \oslash \mathcal{T}} \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}/\mathcal{T}'.$$

- Ici $\mathcal{T}' \oslash \mathcal{T}$ signifie
  - $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$, i.e. tout ouvert pour $\mathcal{T}$ est ouvert pour $\mathcal{T}'$,
  - Pour toute composante connexe Y pour $\mathcal{T}'$ on a $\mathcal{T}'\big|_Y = \mathcal{T}\big|_Y$,
  - $x \sim_{\mathcal{T}/\mathcal{T}'} y \Leftrightarrow x \sim_{\mathcal{T}'/\mathcal{T}'} y$.
- Le pré-ordre associé à $\mathcal{T}/\mathcal{T}'$ est la clôture transitive de la relation

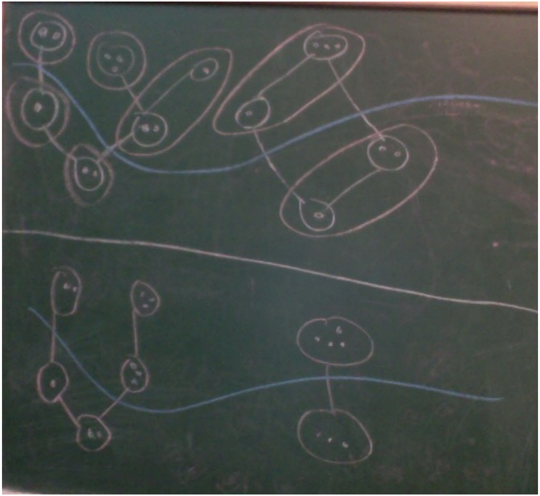
$$x \leq_{\mathcal{T}} y \text{ ou } y \leq_{\mathcal{T}'} x.$$


35
67
1
23458
167
35
67
1

Theorème

(F. Fauvet, L. Foissy, DM). Les deux coproduits sont compatibles :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}_X \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[d, "\Delta"'] & & \mathbb{T}_X \otimes \mathbb{T}_X \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
(\mathbb{T}\otimes\mathbb{T})_X \arrow[dr, "\Gamma\otimes\Gamma"'] & & \mathbb{T}_X \otimes (\mathbb{T}\otimes\mathbb{T})_X \\
& \bigoplus_{Y\subset X} \mathbb{T}_{X\setminus Y}\otimes\mathbb{T}_{X\setminus Y}\otimes\mathbb{T}_Y\otimes\mathbb{T}_Y \arrow[ur, "m^{1,3}"'] &
\end{tikzcd}$$



Esquisse de preuve

Corollaire

$\mathcal{H} := \overline{\mathcal{K}}(\mathbb{T})$ est un comodule-bigèbre. Plus précisément $(\mathcal{H}, m, \Delta)$ est un comodule-algèbre de Hopf sur la bigèbre commutative $(\mathcal{H}, m, \Gamma)$.

Une **opérade** est un monoïde...

Une **opérade** est un monoïde... mais pour le produit de composition $\boxtimes$ (qui, soit dit en passant, n'est pas symétrique).

Une **opérade** est un monoïde... mais pour le produit de composition $\boxtimes$ (qui, soit dit en passant, n'est pas symétrique). Cela se décline en **compositions partielles**. Une opérade est une espèce $\mathbb{E}$ munie de $\mathcal{C}$-morphismes

$$\circ_x : \mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \longrightarrow \mathbb{E}_{X \sqcup_x Y}$$

avec $X \sqcup_x Y := (X \setminus \{x\}) \sqcup Y$. vérifiant

Une **opérade** est un monoïde... mais pour le produit de composition $\boxtimes$ (qui, soit dit en passant, n'est pas symétrique). Cela se décline en **compositions partielles**. Une opérade est une espèce $\mathbb{E}$ munie de $\mathcal{C}$-morphismes

$$\circ_x : \mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \longrightarrow \mathbb{E}_{X \sqcup_x Y}$$

avec $X \sqcup_x Y := (X \setminus \{x\}) \sqcup Y$. vérifiant

- la propriété fonctorielle

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \arrow[r, "\circ_x"] & \mathbb{E}_{X \sqcup_x Y} \\
\mathbb{E}_{X'} \otimes \mathbb{E}_{Y'} \arrow[u, "\mathbb{E}_\varphi \otimes \mathbb{E}_\psi"] \arrow[r, "\circ_{\varphi(x)}"] & \mathbb{E}_{X' \sqcup_{\varphi(x)} Y'} \arrow[u, "\mathbb{E}_{\varphi \sqcup_x \psi}"']
\end{tikzcd}$$

pour toutes bijections $\varphi : X \to X'$ et $\psi : Y \to Y'$,

- l'associativité parallèle : pour tout $x, x' \in X$,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[r, "\circ_x \otimes \mathrm{I}"] \arrow[d, "\circ_{x'} \otimes \mathrm{I}"'] & \mathbb{E}_{X \sqcup_x Y} \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[d, "\circ_{x'}"] \\
\mathbb{E}_{X \sqcup_{x'} Z} \otimes \mathbb{E}_Y \arrow[r, "\circ_x"'] & \mathbb{E}_{X \sqcup Y \sqcup Z \setminus \{x, x'\}}
\end{tikzcd}
$$

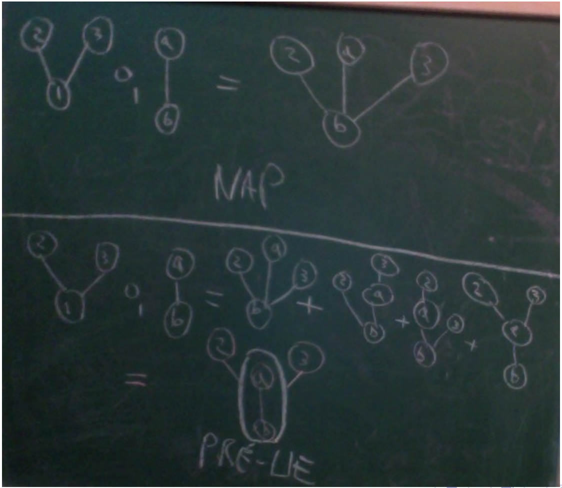
- l'associativité parallèle : pour tout $x, x' \in X$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[r, "\circ_x \otimes \mathrm{I}"] \arrow[d, "\circ_{x'} \otimes \mathrm{I}"'] & \mathbb{E}_{X \sqcup_x Y} \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[d, "\circ_{x'}"] \\
\mathbb{E}_{X \sqcup_{x'} Z} \otimes \mathbb{E}_Y \arrow[r, "\circ_x"'] & \mathbb{E}_{X \sqcup Y \sqcup Z \setminus \{x, x'\}}
\end{tikzcd}$$

- l'associativité séquentielle : pour tout $x \in X$ et $y \in Y$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_Y \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[r, "\mathrm{I} \otimes \circ_y"] \arrow[d, "\circ_x \otimes \mathrm{I}"'] & \mathbb{E}_X \otimes \mathbb{E}_{Y \sqcup_y Z} \arrow[d, "\circ_x"] \\
\mathbb{E}_{X \sqcup_x Y} \otimes \mathbb{E}_Z \arrow[r, "\circ_y"'] & \mathbb{E}_{X \sqcup Y \sqcup Z \setminus \{x, y\}}
\end{tikzcd}$$

Deux exemples : les opérades pré-Lie et NAP, toutes deux construites sur l'espèce $\mathbb{RT}$ des arbres enracinés.



L'opérade $\mathbb{E}(A)$

- Soient $\alpha : A^{\otimes X} \to A$ et $\beta : A^{\otimes Y} \to A$. La composition partielle $\alpha \circ_x \beta$ est donnée par la composition

$$A^{\otimes X \sqcup_x Y} \xrightarrow{\bigotimes_{z \in X} \beta_z} A^{\otimes X} \xrightarrow{\alpha} A.$$

- Ici $\beta_z = \mathrm{I}_A : A \to A$ pour $z \neq x$, et $\beta_x = \beta : A^{\otimes Y} \to A$.

Bi-espèces

- Une bi-espèce dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un foncteur $\mathbb{B}$ de la catégorie $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{C}$.

Bi-espèces

- Une bi-espèce dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un foncteur $\mathbb{B}$ de la catégorie $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{C}$.
- Une bi-espèce est donc la donnée d'objets $\mathbb{B}_Y^X$ de $\mathcal{C}$, tout couple de bijections $\varphi : X' \to X$ et $\psi : Y \to Y'$ induisant fonctoriellement un isomorphisme
$$\mathbb{B}_\varphi^\psi : \mathbb{B}_Y^X \longrightarrow \mathbb{B}_{Y'}^{X'}.$$
- X est l'ensemble des **entrées** et Y est l'ensemble des **sorties**.

Bi-espèces

- Une bi-espèce dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un foncteur $\mathbb{B}$ de la catégorie $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathcal{C}$.
- Une bi-espèce est donc la donnée d'objets $\mathbb{B}_Y^X$ de $\mathcal{C}$, tout couple de bijections $\varphi : X' \to X$ et $\psi : Y \to Y'$ induisant fonctoriellement un isomorphisme
$$\mathbb{B}_\varphi^\psi : \mathbb{B}_Y^X \longrightarrow \mathbb{B}_{Y'}^{X'}.$$
- X est l'ensemble des **entrées** et Y est l'ensemble des **sorties.**
- Exemple : pour tout objet A de $\mathcal{C}$,
$$\mathbb{B}(A)_Y^X := \mathcal{C}(A^{\otimes X}, A^{\otimes Y}).$$

ProPs à roues

M. Markl, S. Merkulov, S. Shadrin (2009)
voir aussi P. Clavier, L. Foissy, S. Paycha (2020)

Une **ProP à roues** est une bi-espèce $\mathbb{B}$ munie

- d'une composition horizontale associative

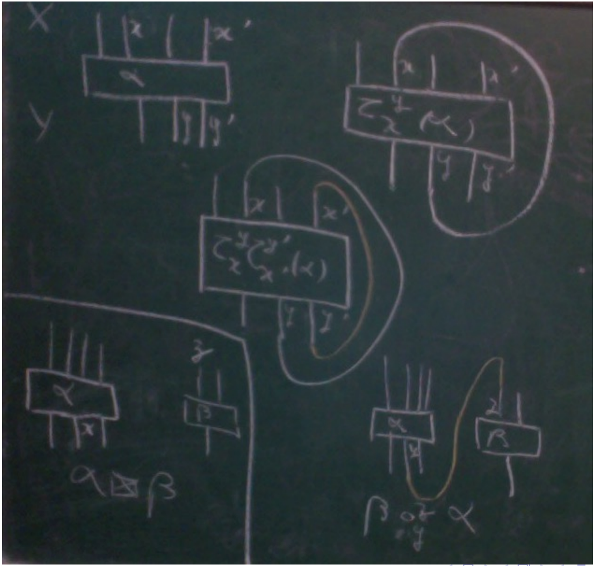
$$\boxtimes : \mathbb{B}_Y^X \times \mathbb{B}_{Y'}^{X'} \longrightarrow \mathbb{B}_{Y \sqcup Y'}^{X \sqcup X'},$$

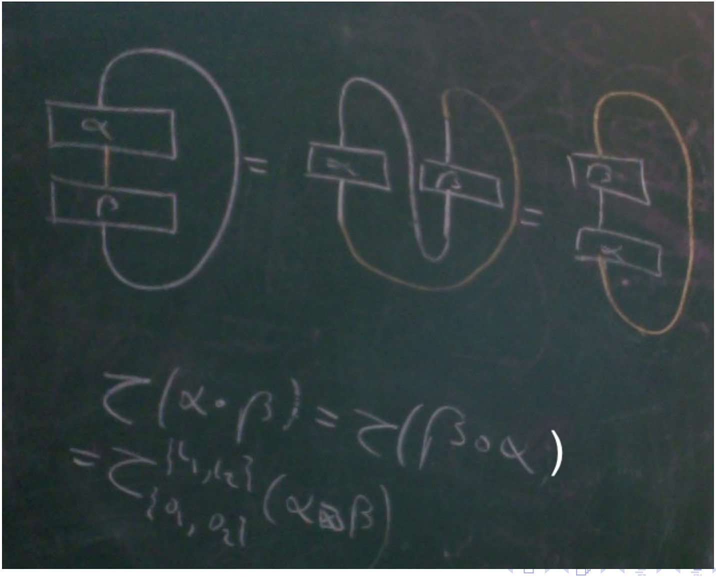
- de **traces partielles**

$$\tau_y^x : \mathbb{B}_Y^X \longrightarrow \mathbb{B}_{Y \setminus \{y\}}^{X \setminus \{x\}}$$

le tout sujet à un ensemble d'axiomes. En particulier la composition des traces partielles est commutative :

$$\tau_y^x \circ \tau_{y'}^{x'} = \tau_{y'}^{x'} \circ \tau_y^x : \mathbb{B}_Y^X \longrightarrow \mathbb{B}_{Y \setminus \{y,y'\}}^{X \setminus \{x,x'\}}.$$


X
Y
x
x'
α
y
y'
β


α
β
=
α
β
=
β
α
$\tau(\alpha\cdot\beta) = \tau(\beta\circ\alpha)$
$= \tau^{\{i_1,i_2\}}_{\{o_1,o_2\}}(\alpha\boxtimes\beta)$

Merci pour votre attention !