Comment se contenter de s_1^1.

Sylvain Chevillard

9 octobre 2007

Rappels et notations

Nous allons manipuler des fonctions de codage des n-uplets et leurs fonctions de décodage. Précisément, pour tout $n \in \{2,\, 3,\, \ldots\}$ on note $\langle\cdot\rangle_n$ une fonction bijective de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{N}$ et on note $\Pi_1^n,\, \ldots,\, \Pi_n^n$ les projections correspondant au décodage.

Par extension, $\langle\cdot\rangle_1$ et Π_1^1 désigneront la fonction identité.

Pour alléger les notations, on notera simplement $\langle\cdot\rangle$ et Π_k ces fonctions.

On supposera (et on sait que c'est possible) que les projections sont des fonctions calculables. En outre, on suposera que la fonction de codage vérifie : si $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sont des fonctions calculables, alors $\langle\psi_1,\, \ldots,\, \psi_n\rangle$ est une fonction calculable (c'est ce qu'on entend par là lorsque, par abus de langage, on dit que "la fonction de codage est calculable").

Nous considérons ici une énumération (surjective) des machines de Turing $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots$ vérifiant :

- *universalité :* il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,\, x,\; \varphi_u(\langle n,\, x\rangle) = \varphi_n(x)$.
- *s-1-1 :* il existe une fonction récursive totale s telle que $\forall a,\, x,\, y,\; \varphi_a(\langle x,\, y\rangle) = \varphi_{s(\langle a,\, x\rangle)}(y)$.

L'objet de ce document est de montrer qu'il s'agit d'un système acceptable de programmation.

Un lemme utile

Lemme 1 (Composition)**.** *Il existe une fonction c récursive totale, telle que*

$$\forall a,\, b,\, x,\; (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_{c(\langle a,\, b\rangle)}(x).$$

Démonstration. Considérons la fonction $\psi : \langle\alpha,\, \langle\beta,\, x\rangle\rangle \mapsto \varphi_\alpha(\varphi_\beta(x))$.

Cette fonction est calculable. En effet, on peut écrire

$$\psi(p) = \varphi_u(\langle\Pi_1(p),\, \varphi_u(\langle\Pi_1(\Pi_2(p)),\, \Pi_2(\Pi_2(p))\rangle)\rangle).$$

Donc ψ s'écrit comme composée de fonctions calculables et de fonction de codage. Elle est donc calculable. Il existe donc $\omega \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_\omega = \psi$.

Alors

$$\forall a,\, b,\, x,\; (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \psi(\langle a,\, \langle b,\, x\rangle\rangle) = \varphi_\omega(\langle a,\, \langle b,\, x\rangle\rangle) = \varphi_{s(\langle\omega,\, a\rangle)}(\langle b,\, x\rangle) = \varphi_{s(\langle s(\langle\omega,\, a\rangle),\, b\rangle)}(x).$$

Soit donc la fonction $c : \langle a,\, b\rangle \mapsto s(\langle s(\langle\omega,\, a\rangle),\, b\rangle)$. On a $\forall p,\; c(p) = s(\langle s(\langle\omega,\, \Pi_1(p)\rangle),\, \Pi_2(p)\rangle)$ donc c est calculable comme composée de fonctions calculables et de fonction de codage. Ceci achève la preuve. $\square$

s_n^m à partir de s_1^1

Soient n et m deux entiers non nuls. Nous voulons montrer qu'il existe une fonction récursive totale f (généralement appelée s_n^m) vérifiant

$$\forall a,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, \ldots,\, y_m,\; \varphi_a(\langle x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, \ldots,\, y_m\rangle) = \varphi_{f(\langle a,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\rangle)}(\langle y_1,\, \ldots,\, y_m\rangle).$$

Lemme 2. *La fonction*

$$\psi : \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_m\rangle\rangle \mapsto \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle$$

est calculable.

Il existe donc un entier κ tel que $\psi = \varphi_\kappa$.

Démonstration. On a $\psi(p) = \langle \Pi_1(\Pi_1(p)), \ldots, \Pi_n(\Pi_1(p)), \Pi_1(\Pi_2(p)), \ldots, \Pi_m(\Pi_2(p))\rangle$. ψ est donc calculable comme composée de fonctions calculables et d'une fonction de codage. □

En utilisant la fonction φ_κ on a à présent pour tous $a, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$:

$$\varphi_a(\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle) = (\varphi_a \circ \varphi_\kappa)(\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_m\rangle\rangle) = \varphi_{c(\langle a, \kappa\rangle)}(\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_1, \ldots, y_m\rangle\rangle).$$

En utilisant la fonction s on a donc :

$$\varphi_a(\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle) = \varphi_{s(\langle c(\langle a, \kappa\rangle), \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle)}(\langle y_1, \ldots, y_m\rangle).$$

Lemme 3. *La fonction $f : \langle a, x_1, \ldots, x_n\rangle \mapsto s(\langle c(\langle a, \kappa\rangle), \langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle)$ est calculable. Ceci achève la démonstration puisque f est exactement la fonction s_n^m recherchée.*

Démonstration. On a pour tout p,

$$f(p) = s(\langle c(\langle \Pi_1(p), \kappa\rangle), \langle \Pi_2(p), \ldots, \Pi_{n+1}(p)\rangle\rangle).$$

f s'écrit donc comme composée de fonctions calculables et de fonctions de codages et est donc calculable. □