Journées SDA2, Paris, jeudi 4 octobre 2007

Le mot de Fibonacci est-il toujours optimal ?

Julien Cassaigne

Institut de mathématiques de Luminy - CNRS, Marseille, France

cassaigne@iml.univ-mrs.fr

Le mot de Fibonacci est-il toujours optimal ?

$$\mathbf{f} = abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaababa\ldots$$

- Répétitions
- Récurrence
- Palindromes

Répétitions (1)

Soit $\mathbf{u} = u_0u_1u_2\ldots \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini.

L'exposant $e(w)$ d'un mot $w \in A^*$ est le maximum de $|w|/|v|$ sur tous les mots $v \in A^+$ tels que w est préfixe de v^ω.

L'index (ou exposant critique) de $\mathbf{u}$ est la borne supérieure des exposants des répétitions qui apparaissent dans $\mathbf{u}$:

$$\mathrm{ind}(\mathbf{u}) = \sup\{e(w) \colon w \in F(\mathbf{u})\} \in \,]1, +\infty]$$

Quel est le mot binaire d'index minimal ?

Répétitions (2)

Quel est le mot binaire d'index minimal ?

Ce n'est pas le mot de Fibonacci !
Mais le mot de Prouhet-Thue-Morse

$$\mathbf{t} = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaababbaabbabaababbabaabbaab\ldots$$

pour lequel $\mathrm{ind}(\mathbf{t}) = 2$, tandis que $\mathrm{ind}(\mathbf{f}) = 2 + \Phi \simeq 3,618$
[Mignosi et Pirillo, 1992].

Un cube : $\mathbf{f} = abaab(aba)(aba)(aba)b\ldots$.

Répétitions (3)

Quel est le mot sturmien d'index minimal ?

Si $\mathbf{u}$ est un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, alors

$$\mathrm{ind}(\mathbf{u}) = \sup_{n \geq 0} \left(2 + a_{n+1} + \frac{q_{n-1} - 2}{q_n} \right)$$

[Damanik et Lenz, 2002]
où $p_n/q_n = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$,
$q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$.

$\mathbf{f}$, de pente $2 - \Phi = [0; 2, 1, 1, \ldots]$, est maintenant optimal...
mais il n'est pas seul !

Répétitions (4)

Théorème [Carpi et de Luca, 2000]. Un mot sturmien $\mathbf{u}$ a pour index $\mathrm{ind}(\mathbf{u}) = 2 + \Phi$ si et seulement si sa pente est l'un des six nombres

$$\begin{array}{l|l} \frac{3-\Phi}{5} = [0; 3, 1, 1, 1, \ldots] \simeq 0,276 & \frac{2+\Phi}{5} = [0; 1, 2, 1, 1, 1, \ldots] \simeq 0,724 \\ 2 - \Phi = [0; 2, 1, 1, \ldots] \simeq 0,382 & \Phi - 1 = [0; 1, 1, 1, \ldots] \simeq 0,618 \\ \frac{3+\Phi}{11} = [0; 2, 2, 1, 1, \ldots] \simeq 0,420 & \frac{8-\Phi}{11} = [0; 1, 1, 2, 1, 1, \ldots] \simeq 0,580 \end{array}$$

et $\mathbf{u}$ est dans le sous-shift engendré respectivement par $h_1(\mathbf{f})$, $\mathbf{f}$, $h_2(\mathbf{f})$, $E(h_1(\mathbf{f}))$, $E(\mathbf{f})$ ou $E(h_2(\mathbf{f}))$, où $h_1(a) = aab$, $h_1(b) = a$, $h_2(a) = ababa$, $h_2(b) = ab$, $E(a) = b$, $E(b) = a$.

Les mots sturmiens de pentes $\frac{4+\Phi}{19}$ et $\frac{15-\Phi}{19}$ ont pour index $\frac{11}{3} > 2+\Phi$. Tous les autres mots sturmiens sont d'index au moins 4.

Répétitions longues (1)

Considérons uniquement les répétitions arbitrairement longues :

$$\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) = \lim_{n\to\infty} \sup\{e(w) \colon w \in F(\mathbf{u}) \text{ et } |w| \geq n\}.$$

Si $\mathbf{u}$ est un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, alors

$$\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) = 2 + \limsup_{n\to\infty} [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

[Vandeth, 2000] (énoncé pour les points fixes seulement).

$\mathbf{f}$ est optimal parmi les mots sturmiens,
de même que $\sigma(\mathbf{f})$ pour tout morphisme sturmien σ.

Le mot de Prouhet-Thue-Morse est-il toujours optimal parmi l'ensemble des mots binaires ?

Répétitions longues (2)

Un point fixe binaire comme $\mathbf{t}$ contient des carrés arbitrairement longs. Il existe des mots binaires dont les carrés sont de longueur bornée [Entringer, Jackson et Schatz, 1974].

On peut faire encore mieux : soit $\mathbf{v} \in \{0, 1, \ldots, 7\}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\begin{cases} v_{2n} = 2n \mod 8 \\ v_{2^{k+1}n+2^k-1} = 2\lfloor n/2^k \rfloor + 1 \mod 8 \end{cases}$$

et soit $\mathbf{u} = \sigma(\mathbf{v})$, où $\sigma(i) = a^{8-i}b^{i+1}$. Alors $\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) = \mathrm{ind}^*(\mathbf{v}) = 1$. Plus précisément, si $xyx \in F(\mathbf{v})$, alors $2|xy| \geq (|x|+1)^2$.

$$\mathbf{v} = 01214161032143610521456107214761012341610323436 1\ldots$$

Répétitions initiales (1)

L'exposant critique initial de $\mathbf{u}$ est la borne supérieure des exposants des répétitions qui sont préfixes de $\mathbf{u}$:

$$\mathrm{ice}(\mathbf{u}) = \sup\{e(w) \colon w \text{ préfixe de } \mathbf{u}\}$$

ou en ne considérant que les répétitions longues :

$$\mathrm{ice}^*(\mathbf{u}) = \lim_{n\to\infty} \sup\{e(w) \colon w \text{ préfixe de } \mathbf{u} \text{ et } |w| \geq n\}$$

Parmi tous les mots infinis, $\mathrm{ice}(ab^\omega) = \mathrm{ice}^*(ab^\omega) = 1$ est manifestement optimal.

On a $\mathrm{ice}(\mathbf{f}) = \mathrm{ice}^*(\mathbf{f}) = \Phi + 1$.
$\mathbf{f}$ est-il toujours optimal parmi les mots sturmiens ?

Répétitions initiales (2)

On a $\text{ice}(\mathbf{f}) = \text{ice}^*(\mathbf{f}) = \Phi + 1$.
$\mathbf{f}$ est-il toujours optimal parmi les mots sturmiens ? Non.

Un mot sturmien $\mathbf{u}$ a une infinité de préfixes carrés [Allouche, Davison, Queffélec et Zamboni, 2001] donc $\text{ice}(\mathbf{u}) \geq \text{ice}^*(\mathbf{u}) \geq 2$.

Soit $\alpha = [0; 1, 10, 10, 100, 10^3, 10^5, 10^8, 10^{13}, 10^{21}, 10^{34}, \ldots]$.
Il existe un mot sturmien $\mathbf{u}$ de pente α tel que $\text{ice}^*(\mathbf{u}) = 2$ [Berthé, Holton et Zamboni, 2006].

Jeu : $\mathbf{f}$ est caché quelque part dans cette construction, trouvez-le !
(On peut s'aider d'une calculatrice.)

Répétitions initiales (3)

Soit $I(\mathbf{u})$ la borne inférieure des $\text{ice}^*(\mathbf{v})$ quand $\mathbf{v}$ décrit le sous-shift engendré par $\mathbf{u}$. Alors $I(\mathbf{u}) \leq \Phi + 1$ si $\mathbf{u}$ n'est pas ultimement périodique. [Mignosi, Restivo et Salemi, 1988].

Si $\mathbf{u}$ est dans le sous-shift de Fibonacci, sans être un décalé de $\mathbf{f}$, alors $\text{ice}^*(\mathbf{u}) \geq 3$. Donc $I(\mathbf{f}) = \Phi + 1$.

Ainsi $\mathbf{f}$ est à nouveau optimal parmi tous les mots non ultimement périodiques, cette fois comme maximiseur.

Récurrence (1)

La fonction de récurrence d'un mot infini $\mathbf{u}$ est définie par

$$R(n) = \inf\{N \in \mathbb{N} \colon \forall w \in F_N(\mathbf{u}), F_n(w) = F_n(\mathbf{u})\}$$

et son quotient de récurrence par

$$\rho^*(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n}.$$

On remarque que $\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) \geq 1 + \frac{1}{\rho^*(\mathbf{u})-1}$.
Problème ouvert : quelle est la borne inférieure de la quantité

$$(\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) - 1)(\rho^*(\mathbf{u}) - 1)$$

parmi tous les mots infinis pour lesquels elle est bien définie ?

Pour le mot de Fibonacci, $\rho^*(\mathbf{f}) = \Phi + 2$. Est-ce optimal ?

Récurrence (2)

Pour le mot de Fibonacci, $\rho^*(\mathbf{f}) = \Phi + 2$. Est-ce optimal ?

Parmi les mots sturmiens, oui :
si $\mathbf{u}$ est un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, alors

$$\rho^*(\mathbf{u}) = 2 + \limsup_{n \to \infty} [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

[Cassaigne, 1999].
Donc si a_n ne vaut pas ultimement 1, $\rho^*(\mathbf{u}) \geq \sqrt{2} + 3$.

En fait, $\mathbf{f}$ semble aussi être optimal parmi l'ensemble des mots non périodiques [Rauzy, 1983].

Récurrence (3)

Si $\mathbf{u}$ est un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, alors

$$\mathrm{ind}^*(\mathbf{u}) = 2 + \limsup_{n \to \infty} [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

et

$$\rho^*(\mathbf{u}) = 2 + \limsup_{n \to \infty} [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

On observe que pour les mots sturmiens, $\rho^*(\mathbf{u}) = \mathrm{ind}^*(\mathbf{u})$.

Comment expliquer cette égalité ?

Caractérise-t-elle les mots sturmiens ?

(Pour le mot de Prouhet-Thue-Morse, $\rho^*(\mathbf{t}) = 9$ et $\mathrm{ind}^*(\mathbf{t}) = 2$.)

Première occurrence (1)

Considérons maintenant les préfixes. Par analogie avec la fonction de récurrence, on définit

$$R'(n) = \inf\{N \in \mathbb{N} \colon F_n(u_0 \ldots u_{N-1}) = F_n(\mathbf{u})\}$$

et

$$\rho'^*(\mathbf{u}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{R'(n)}{n}.$$

Notons que $R'(n) - n + 1$ est la dernière position où un facteur de longueur n apparaît pour la première fois.

$\rho'^*(\mathbf{f}) = \Phi + 1$. Est-ce que $\mathbf{f}$ est optimal parmi les mots infinis non ultimement périodiques ?

Première occurrence (2)

$\rho'^*(\mathbf{f}) = \Phi + 1$. Est-ce que $\mathbf{f}$ est optimal parmi les mots infinis non ultimement périodiques ?

Soit $\mathbf{u}$ le point fixe de $a \mapsto abaababa$, $b \mapsto aba$:

$\mathbf{u} = abaababaabaababaabaababaabaababaabaababaabaababaabaababaa\ldots$

$\mathbf{u}$ is un mot sturmien non standard de pente $\frac{5-\sqrt{10}}{5}$. Alors

$$\rho'^*(\mathbf{u}) = \frac{29 - 2\sqrt{10}}{9} \simeq 2,519 < 2,618 \simeq \Phi + 1$$

et cette valeur est optimale [Cassaigne, 1997].

Palindromes (1)

Parmi les facteurs d'un mot infini, quelle est la proportion maximale de palindromes ?
100% pour a^ω.

Supposons maintenant que $\mathbf{u}$ n'est pas ultimement périodique.
Soit $\mathsf{fac}(n)$ la complexité en facteurs de $\mathbf{u}$,
$\mathsf{pal}(n)$ sa complexité palindromique, et

$$\pi(\mathbf{u}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n\,\mathsf{pal}(n)}{\mathsf{fac}(n)}.$$

Pour les mots sturmiens, $\pi(\mathbf{u}) = 1$. Problème ouvert : est-ce optimal ?

Palindromes (2)

Soient $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, n_2, ... les longueurs des palindromes qui sont préfixes de $\mathbf{u}$, dans l'ordre croissant. On définit alors

$$\delta(\mathbf{u}) = \limsup_{i \to \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i}$$

avec la convention $\delta(\mathbf{u}) = +\infty$ si $\mathbf{u}$ a un nombre fini de préfixes palindromes.

Si $\mathbf{u}$ est périodique avec un palindrome pour période, $\delta(\mathbf{u}) = 1$.
Pour le mot de Fibonacci, $n_i = F_{i+3} - 2$ donc $\delta(\mathbf{u}) = \Phi$.
Pour tout autre mot infini, $\delta(\mathbf{u}) \geq 1 + \sqrt{2}/2 > \Phi$ [Fischler, 2005].

Palindromes (3)

Un dernier problème ouvert :

Soit $\mathbf{u}$ un mot non ultimement périodique contenant des palindromes de toute longueur. Soit $p_1(n)$ la position de la première occurrence d'un palindrome de longueur n dans $\mathbf{u}$, et

$$\psi(\mathbf{u}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{p_1(n)}{n}.$$

Pour le mot de Fibonacci, $\psi(\mathbf{f}) = \Phi$.
Quelle est la borne inférieure de ψ, et pour quelle mot est-elle atteinte (si elle l'est) ?