

# Propriétés topologiques des fractals de Rauzy

Anne Siegel (IRISA-CNRS, Rennes)  
Joerg Thuswaldner (Univ. Leoben, Autriche)

October 2007



# Fractals de Rauzy... Tuiles centrales...

Bientôt 30 ans d'histoire, initiée par **Rauzy** et **Thurston**.

- **Systemes dynamiques et espaces de pavages**
  - Représentation des facteurs de type translation d'un système substitutif
  - Représentation géométrique du décalage sur des séquences infinies autosimilaires
  - Partition de Markov pour des automorphismes du tore
  - Représentation géométriques d'espaces de pavage
- **Numération**
  - Représentation compact des nombres entiers dans une base non-entière
  - Exemple de *model set* dans la théorie des quasi-cristaux
  - Approximation simultanée
- **Géométrie discrète**
  - Limite des renormalisations d'une action expansive sur les faces d'un plan discret

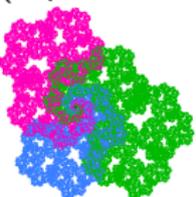
La géométrie de l'objet est fondamentale pour comprendre les propriétés sous-jacentes

# Des propriétés topologiques disparates

0 point intérieur ? Connexité ?



(0 point intérieur)



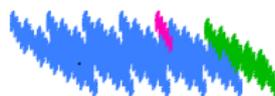
(0 pas point intérieur)

Connexité ?



(non connexe)

Dimension de Hausdorff de la frontière ?



Paramétrisation de la frontière ?



Trouver des critères pour ces différentes propriétés topologiques ?

# Définitions

- **Substitution.** endomorphisme  $\sigma$  du monoïde libre  $\{0, \dots, n\}^*$ .

$$\sigma : \quad 1 \rightarrow 12 \quad 2 \rightarrow 13 \quad 3 \rightarrow 1. \quad (\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1)$$

- **Primitive** La matrice  $\mathbf{M}$  abélianisée de  $\sigma$  est primitive.
- **Points périodiques** Si  $\sigma$  est primitive, il existe au moins un point périodique  $w$

$$\sigma^{\nu}(w) = w.$$

- **Hypothèse Pisot unitaire** La valeur propre dominante  $\beta$  de la matrice  $\mathbf{M}$  est un **nombre de Pisot unitaire**.

$$\sigma : \quad 1 \rightarrow 12 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1 \quad 4 \rightarrow 5 \quad 5 \rightarrow 1 \quad (\beta^3 = \beta + 1)$$

- **(Ir)réductible** Soit  $d \leq n$  le degré algébrique de  $\beta$  et  $Min_{\beta}$  son polynome minimal.  
Si  $d \neq n$ , la substitution est **réductible**.

# Fractal de Rauzy / Tuile centrale

- Beta-decomposition of de l'espace  $\mathbb{R}^n$ :
  - Beta-droite dilatante  $\mathbb{H}_e$
  - Beta-espace contractant  $\mathbb{H}_c$  : engendré par les vecteurs propres conjugués à  $\beta$ .
  - Beta-espace orthogonal:  $\mathbb{H}_o$  engendré par les autres vecteurs propres.
- Beta-projection: projection sur l'espace contractant parallèlement au reste  $G\mathbb{H}_e + \mathbb{H}_o$   
$$\forall w \in \mathcal{A}^*, \pi(\mathbf{l}(\sigma(w))) = \mathbf{h}\pi(\mathbf{l}(w)).$$

# Fractal de Rauzy / Tuile centrale

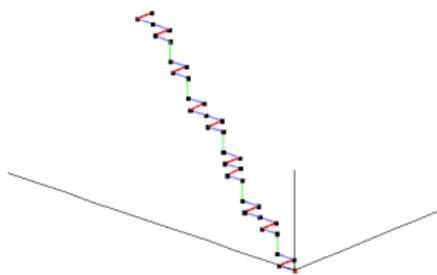
$$\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$$

112 112 113 112 112 113 112 112 4 112 112  
113 112 112 113 112 112 113 112 112 4 112  
112 113 112 112 113 1 112 ...

## Construction du fractal

- Point périodique
- Plongé en un escalier  $\mathbb{R}^n$ .
- Projeter l'escalier sur l'espace contractant
- Colorier les points en fonction du type de marche/lettre
- Prendre la fermeture

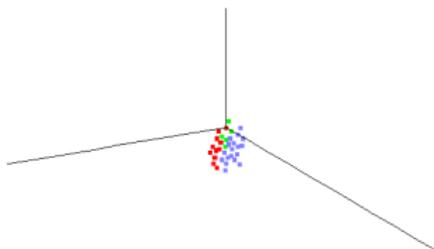
# Fractal de Rauzy / Tuile centrale



## Construction du fractal

- Point périodique
- Plongé en un escalier  $\mathbb{R}^n$ .
- Projeter l'escalier sur l'espace contractant
- Colorier les points en fonction du type de marche/lettre
- Prendre la fermeture

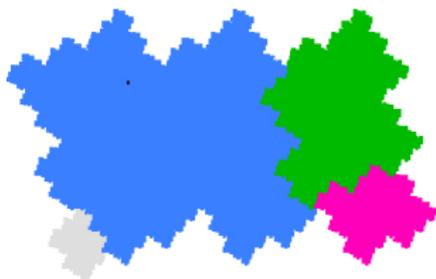
# Fractal de Rauzy / Tuile centrale



## Construction du fractal

- Point périodique
- Plongé en un escalier  $\mathbb{R}^n$ .
- Projeter l'escalier sur l'espace contractant
- Colorier les points en fonction du type de marche/lettre
- Prendre la fermeture

# Fractal de Rauzy / Tuile centrale



## Construction du fractal

- Point périodique
- Plongé en un escalier  $\mathbb{R}^n$ .
- Projeter l'escalier sur l'espace contractant
- Colorier les points en fonction du type de marche/lettre
- Prendre la fermeture

## Definition

Soit  $\sigma$  une substitution primitive Pisot unitaire. La tuile de Rauzy de  $\sigma$  est définie par

$$\mathcal{T}_\sigma = \overline{\{\pi(\mathbf{l}(u_0 \cdots u_{i-1})); i \in \mathbb{N}\}}.$$

$$\text{Sous-Tuile: } \mathcal{T}(a) = \overline{\{\pi(\mathbf{l}(u_0 \cdots u_{i-1})); i \in \mathbb{N}, u_i = a\}}.$$

# Propriétés topologiques principales

## Theorem

Soit  $\sigma$  une substitution primitive Pisot unitaire

- La tuile  $\mathcal{T}$  est **compacte** subset of  $\mathbb{R}^{d-1}$ , d'**intérieur non vide** et **de mesure non nulle** dans un espace Euclidien de dimension  $d - 1$ . ( $d$  degree of  $\text{Min}_\beta$ ).
- Chaque sous-tuile est la **fermeture de son intérieur**.

- Les sous-tuiles de  $\mathcal{T}$  sont solutions du **GIFS**:

$$\mathcal{T}(a) = \bigcup_{b \in \mathcal{A}, \sigma(b) = \text{pas}} \mathbf{h}(\mathcal{T}(b)) + \pi(\mathbf{l}(p))$$

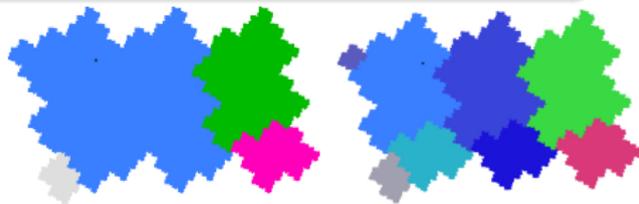
- Les sous-tuiles sont **disjointes** si la substitution vérifie la condition de coincidence.

$$\mathcal{T}(1) = \mathbf{h}[\mathcal{T}(1) \cup (\mathcal{T}(1) + \pi(\mathbf{e}_1)) \cup \mathcal{T}(2) \cup (\mathcal{T}(2) + \pi(\mathbf{e}_1)) \cup \mathcal{T}(4)],$$

$$\mathcal{T}(2) = \mathbf{h}(\mathcal{T}(1) + 2\pi(\mathbf{e}_1)),$$

$$\mathcal{T}(3) = \mathbf{h}(\mathcal{T}(2) + 2\pi(\mathbf{e}_1)),$$

$$\mathcal{T}(4) = \mathbf{h}(\mathcal{T}(3))$$



$$\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 4, \\ \sigma(4) = 1$$

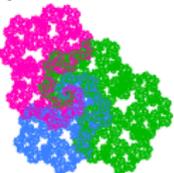
# Propriétés topologiques spécifiques

0 point intérieur

(Conditions suffisantes et CNS)  
[Rauzy, Akiyama]



(0 point intérieur)



(0 pas point intérieur)

Connexité

(Conditions suffisantes, Conditions nécessaires)  
[Canterini, Messaoudi]

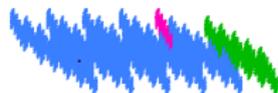


(non connexe)

Dimension de Hausdorff de la frontière

(Exemples de calculs)

[Feng-Furukado-Ito, Thuswaldner]



disklikeness

Paramétrisation de la frontière

(Exemples)

[Messaoudi, Sirvent]



Critère généraux pour ces propriétés ?

## Premier outil: pavage

Un *recouvrement discret* est donné par *un ensemble de translation*  
 $\Gamma \subset \mathbb{H}_c \times \mathcal{A}$  tel que

- il y a recouvrement:  $\mathbb{H}_c = \bigcup_{(\gamma,i) \in \Gamma} \mathcal{T}_i + \gamma$
- Les points forment un ensemble de Delaunay
- Presque tous les points de  $\mathbb{H}_c$  appartiennent à exactement  $p$  tuiles.

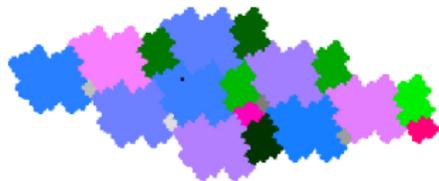
# Recouvrement autosimilaire

Les points proviennent des meilleures approximations entières de l'hyperplan orthogonal à la droite dilatante.

$$\Gamma_{srs} = \{(\pi(\mathbf{x}), i) \in \pi(\mathbb{Z}^n) \times \mathcal{A}, 0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle\}.$$

Ensemble de Delaunay, auto-similaire, apériodique et répétitif.

Pavage ssi super-coïncidences



# Recouvrement périodique

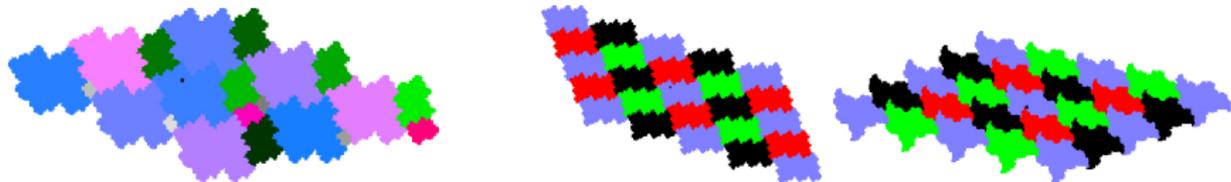
Les points proviennent des points entiers de l'hyperplan anti-diagonal de  $\mathbb{R}^n$ .

$(\mathbf{e}_{B(1)}, \dots, \mathbf{e}_{B(d)})$   $\mathbb{Z}$ -basis of  $\pi(\mathbb{Z}^n)$

$$\Gamma_{lattice} = \{(\pi(\mathbf{x}), i) \in \pi(\mathbb{Z}^n) \times \mathcal{A}, \sum_1^d \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_{B(k)} \rangle = 0\}.$$

Ensemble de Delaunay, périodique

Quand  $\sigma$  est irréductible, pavage ssi super coincidences.



## Deuxième outil: Structure autosimilaire des tuiles

On considère deux tuiles qui s'intersectent

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b)) \neq \emptyset.$$

On décompose chacune des tuiles par IFS

$$\mathcal{T}(a) = \bigcup_{\sigma(a_1)=p_1 a s_1} \mathbf{h}(\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)). \quad \mathcal{T}(b) = \bigcup_{\sigma(b_1)=p_2 b s_2} \mathbf{h}(\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)).$$

On réécrit l'intersection pour faire apparaître de nouvelles intersections

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \bigcup_{\substack{\sigma(a_1)=p_1 a s_1 \\ \sigma(b_1)=p_2 b s_2}} \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)] \cap \{\mathbf{h}[\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)] + \pi(\mathbf{x})\}. \\ &= \bigcup \mathbf{h} \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) \cap (\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x}))] \end{aligned}$$

Le **graphe de voisinage** fait correspondre à l'intersection entre deux tuiles toutes les intersections qui apparaissent dans sa décomposition

$$(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b) \rightarrow (\mathbf{0}, a_1) \cap ((\pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x})), b_1)$$

## Deuxième outil: Structure autosimilaire des tuiles

On considère deux tuiles qui s'intersectent

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b)) \neq \emptyset.$$

On décompose chacune des tuiles par IFS

$$\mathcal{T}(a) = \bigcup_{\sigma(a_1)=p_1 a s_1} \mathbf{h}(\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)). \quad \mathcal{T}(b) = \bigcup_{\sigma(b_1)=p_2 b s_2} \mathbf{h}(\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)).$$

On réécrit l'intersection pour faire apparaître de nouvelles intersections

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \bigcup_{\substack{\sigma(a_1)=p_1 a s_1 \\ \sigma(b_1)=p_2 b s_2}} \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)] \cap \{\mathbf{h}[\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)] + \pi(\mathbf{x})\}. \\ &= \bigcup \mathbf{h} \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) \cap (\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x}))] \end{aligned}$$

Le **graphe de voisinage** fait correspondre à l'intersection entre deux tuiles toutes les intersections qui apparaissent dans sa décomposition

$$(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b) \rightarrow (\mathbf{0}, a_1) \cap ((\pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x})), b_1)$$

## Deuxième outil: Structure autosimilaire des tuiles

On considère deux tuiles qui s'intersectent

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b)) \neq \emptyset.$$

On décompose chacune des tuiles par IFS

$$\mathcal{T}(a) = \bigcup_{\sigma(a_1)=p_1 a s_1} \mathbf{h}(\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)). \quad \mathcal{T}(b) = \bigcup_{\sigma(b_1)=p_2 b s_2} \mathbf{h}(\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)).$$

On réécrit l'intersection pour faire apparaître de nouvelles intersections

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \bigcup_{\substack{\sigma(a_1)=p_1 a s_1 \\ \sigma(b_1)=p_2 b s_2}} \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)] \cap \{\mathbf{h}[\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)] + \pi(\mathbf{x})\}. \\ &= \bigcup \mathbf{h} \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) \cap (\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x}))] \end{aligned}$$

Le **graphe de voisinage** fait correspondre à l'intersection entre deux tuiles toutes les intersections qui apparaissent dans sa décomposition

$$(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b) \rightarrow (\mathbf{0}, a_1) \cap ((\pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x})), b_1)$$

## Deuxième outil: Structure autosimilaire des tuiles

On considère deux tuiles qui s'intersectent

$$\mathcal{I} = \mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b)) \neq \emptyset.$$

On décompose chacune des tuiles par IFS

$$\mathcal{T}(a) = \bigcup_{\sigma(a_1)=p_1 a s_1} \mathbf{h}(\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)). \quad \mathcal{T}(b) = \bigcup_{\sigma(b_1)=p_2 b s_2} \mathbf{h}(\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)).$$

On réécrit l'intersection pour faire apparaître de nouvelles intersections

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \bigcup_{\substack{\sigma(a_1)=p_1 a s_1 \\ \sigma(b_1)=p_2 b s_2}} \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) + \pi \mathbf{l}(p_1)] \cap \{\mathbf{h}[\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2)] + \pi(\mathbf{x})\}. \\ &= \bigcup \mathbf{h} \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}[\mathcal{T}(a_1) \cap (\mathcal{T}(b_1) + \pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x}))] \end{aligned}$$

Le **graphe de voisinage** fait correspondre à l'intersection entre deux tuiles toutes les intersections qui apparaissent dans sa décomposition

$$(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b) \rightarrow (\mathbf{0}, a_1) \cap ((\pi \mathbf{l}(p_2) - \pi \mathbf{l}(p_1) + \mathbf{h}^{-1} \pi(\mathbf{x})), b_1)$$

# Graphe de voisinage du pavage auto-similaire

- **Sommets:** paires of faces  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$  telles que
  - $(\pi(\mathbf{x}), b) \in \Gamma_{srs}$  (ensemble de translation)
  - $\|\pi(\mathbf{x})\| \leq \|\mathcal{T}\|$  (condition nécessaire pour que l'intersection ne soit pas vide)
- Il y a une **arête** entre  $(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b)$  et  $(\mathbf{0}, a_1) \cap (\pi(\mathbf{x}_1), b_1)$  si  $\mathcal{T}(a_1) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b_1))$  apparaît à translation près dans la décomposition  $\mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b))$ .

## Theorem

*Le graphe de voisinage du pavage autosimilaire est fini.*

*L'intersection  $\mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b))$  is non vide ssi le graphe contient un chemin infini qui part du sommet  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$ .*

*Chaque chemin infini du graphe partant de  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$  correspond à un point de l'intersection.*

*Le graphe est une description par IFS de la frontière de la tuile*

# Graphe de voisinage du pavage auto-similaire

- **Sommets:** paires of faces  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$  telles que
  - $(\pi(\mathbf{x}), b) \in \Gamma_{srs}$  (ensemble de translation)
  - $\|\pi(\mathbf{x})\| \leq \|\mathcal{T}\|$  (condition nécessaire pour que l'intersection ne soit pas vide)
- Il y a une **arête** entre  $(\mathbf{0}, a) \cap (\pi(\mathbf{x}), b)$  et  $(\mathbf{0}, a_1) \cap (\pi(\mathbf{x}_1), b_1)$  si  $\mathcal{T}(a_1) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b_1))$  apparaît à translation près dans la décomposition  $\mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b))$ .

## Theorem

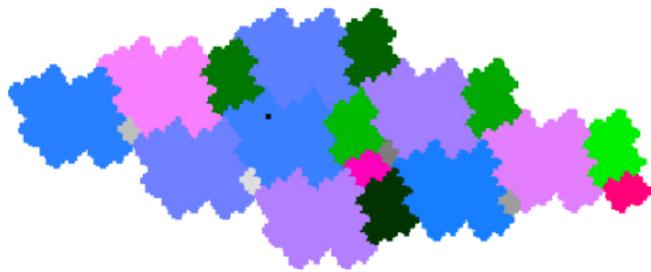
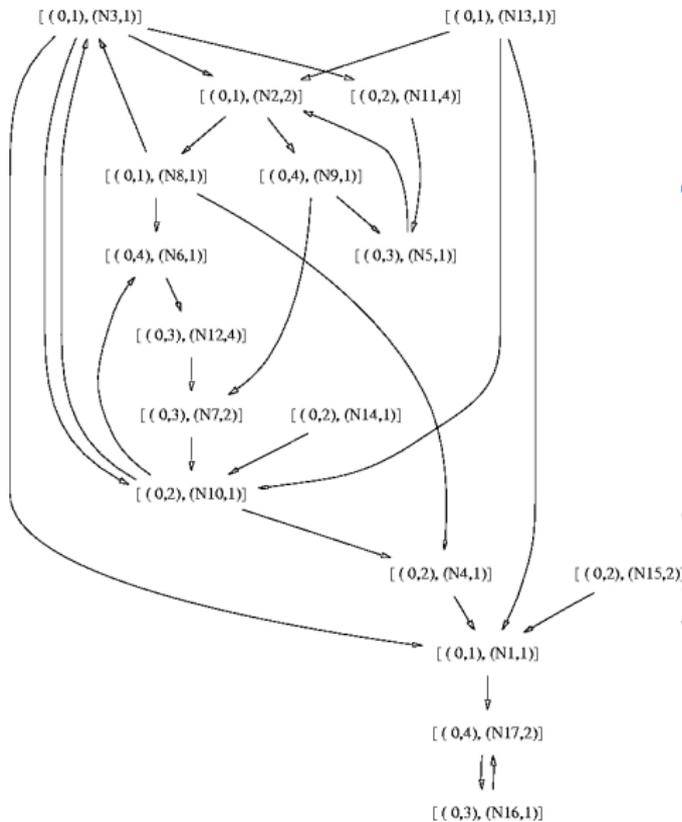
Le graphe de voisinage du pavage autosimilaire est *fini*.

*L'intersection  $\mathcal{T}(a) \cap (\pi(\mathbf{x}) + \mathcal{T}(b))$  is non vide ssi le graphe contient un chemin infini qui part du sommet  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$ .*

*Chaque chemin infini du graphe partant de  $[(\mathbf{0}, a), (\pi(\mathbf{x}), b)]$  correspond à un point de l'intersection.*

Le graphe est une *description par IFS de la frontière de la tuile*

# Exemple



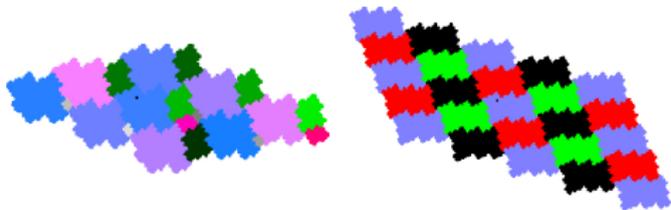
17 sommets dans le graphe: il y a 17 intersections entre une des 4 sous-tuiles centrale et le reste des tuiles.

5 sommets comportant  $(0,1)$ :  $\mathcal{T}(1)$  a 5 voisins dans le pavage.

## D'autres graphes

On peut construire différents graphes sur le même schéma:

- **Graphe de connexité** Paires de sous-tuiles de chaque  $\mathcal{T}(a)$  qui s'intersectent
- **Graphe de voisinage périodique** Paires de tuiles qui s'intersectent dans le pavage périodique
- **Graphe des points triples** Triplets de tuiles qui s'intersectent dans le pavage autosimilaire
- **Graphe des points quadruples** Quadruplets de tuiles qui s'intersectent dans le pavage autosimilaire



- 6 intersections dans le pavage périodique
- 20 intersections triples dans le pavage autosimilaire (redondance)
- 4 intersections quadruples dans le pavage autosimilaire

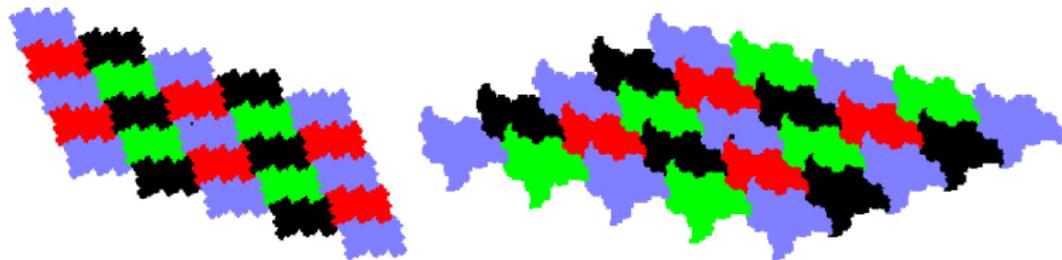
# Application à la frontière

## Proposition

Le *recouvrement autosimilaire* (resp. *périodique*) est un *pavage* ssi la valeur propre dominante de la matrice du graphe de voisinage autosimilaire (resp. *périodique*) est strictement inférieure à  $\beta$ .

**Application:**  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$  engendrent un pavage périodique

$\sigma(1) = 12, \sigma(2) = 13, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 1$  n'engendrent pas un pavage périodique.



## Application à la frontière (2)

### Proposition

*Soit  $\lambda$  le plus grand conjugué algébrique de  $\beta$  et  $\lambda'$  son plus petit conjugué. Soit  $\mu$  la valeur propre dominante de la matrice du graphe de voisinage autosimilaire.*

*Si le graphe de voisinage est fortement connexe, alors*

$$\dim_B(\partial\mathcal{T}) = \dim_B(\partial\mathcal{T}(a)) = d - 1 + \frac{\log \lambda - \log \mu}{\log \lambda'}$$

**Application:** Calculs explicites de dimensions de Hausdorff ou de box-dimension.

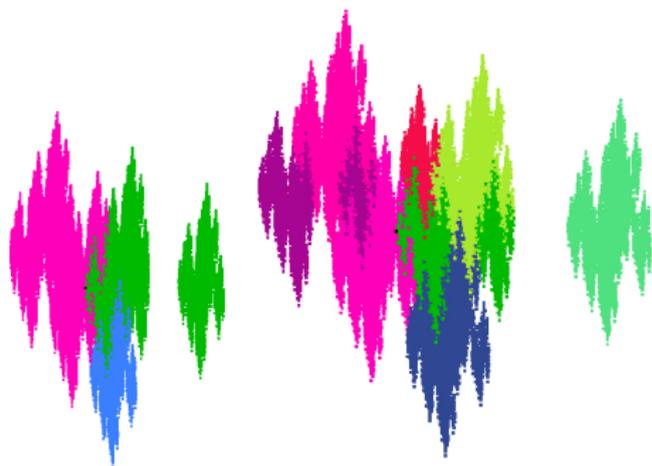
# Connexité

**Graphe de connectivité** Pour tout tuile  $\mathcal{T}(a)$ , on met une arête entre deux sous-tuiles si elles s'intersectent dans la décomposition.

## Proposition

*Chaque  $\mathcal{T}(a)$  est un continuum localement connexe ssi le graphe de connectivité est  $G_a(V, E)$  est connexe pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .*

*$\mathcal{T}$  is connected dès que cette condition est vérifiée et le graphe d'intersection des tuiles  $\mathcal{T}(a)$  est connexe.*



$$\sigma(1) = 3; \sigma(2) = 23, \sigma(3) = 31223.$$

- Les trois tuiles centrales s'intersectent
- Une sous-tuile de  $\mathcal{T}(2)$  est isolée: il manque un sommet dans le graphe de connectivité.

# Non homéomorphe à un disque

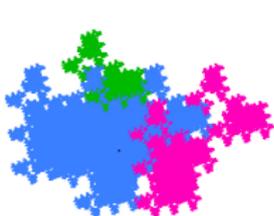
## Proposition

*Supposons que  $\beta$  est de degré 3. Si la tuile centrale  $\mathcal{T}$  est homéomorphe à un disque fermé, alors  $\mathcal{T}$  a au plus 6 voisins  $\lambda$  dans le pavage périodique qui vérifient*

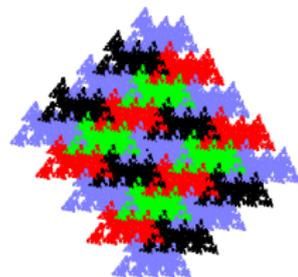
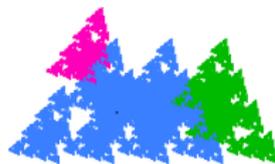
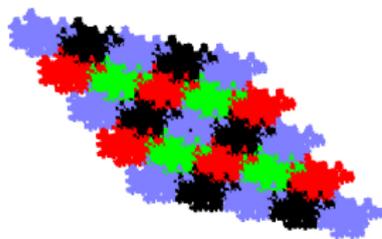
$$|\mathcal{T}_\sigma \cap (\mathcal{T}_\sigma + \gamma)| > 1.$$

Deduced from Bandt and Gelbrich.

**Application:** Condition suffisante pour ne pas être homeo à un disque



8 voisins. pas homéo.



Seulement 6 voisins. Impossible de

# Homéomorphe à un disque

## Theorem

*Supposons que  $\beta$  est de degré 3. Soit  $B_1, \dots, B_k$  une partition de la frontière sous la forme d'intersections de tuiles  $\mathcal{T}(a) \cap (\mathcal{T}(b) + \pi(\mathbf{x}))$ .  
Supposons que*

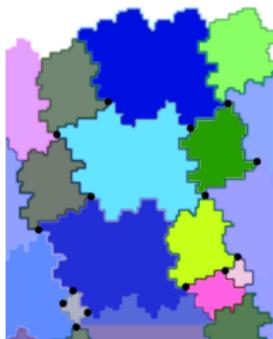
- *Les  $B_i$ 's forment une chaîne circulaire*
- *La décomposition auto-similaire de chaque  $B_i$  est une chaîne régulière*

*Alors la tuile centrale est homéomorphe à un disque?*

Comment traduire cela en terme de graphe de voisinage ? Chaque pièce  $B_i$  correspond à un sommet  $[(\mathbf{0}, a), (\pi\mathbf{x}, b)]$ .

# Critère algorithmique

- Localiser les paires de tuiles qui s'intersectent sur un singleton
- Vérifier que chaque point triple est un singleton
- Pour tout intersection de 2 tuiles  $[(0, a), (\pi x, b)]$  qui n'est pas un singleton, vérifier qu'elle rencontre exactement deux autres intersections du même type.
- Les intersections forment une unique boucle.
- Idem pour l'ensemble des cibles de chaque  $[(0, a), (\pi x, b)]$  dans le graphe de voisinage



$$\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 4, \\ \sigma(4) = 1$$

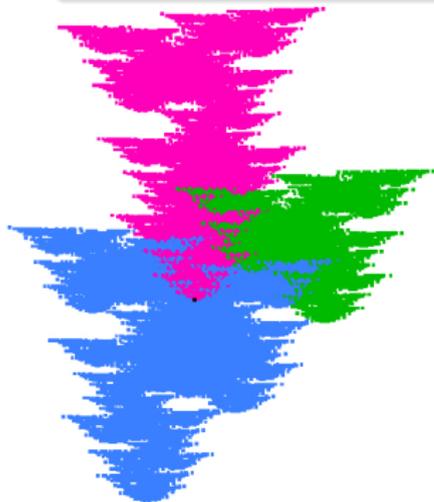
- 17 intersections de deux tuiles
- 4 contiennent exactement un point (Sommets 1, 15, 16, 17)
- 13 intersections restantes qui vérifient les conditions.

La tuile de  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$  est homéomorphe à un disque.

# Non simplement connexe

## Theorem

*Le graphe de voisinage autosimilaire, associés aux graphes des points triples et quadruples permettent de vérifier une condition suffisante pour ne pas être simplement connexe.*



Pas simplement connexe

# Conclusion

- De nombreuses propriétés topologiques se réduisent à l'étude de graphes de voisinage.
- Quelle est la structure de ces graphes pour les beta-substitutions ?
- Quelle est la relation entre les propriétés topologiques et les propriétés ergodiques du système substitutif ou de l'espace de pavage associé ?
- Quelles sont les conséquences des propriétés topologiques en terme de numération et/ou approximation diophantienne ?
- Programmer tout cela correctement ?