A/ Un petit QCM

Vous devez choisir entre deux options et justifier *en au moins une phrase et en au plus trois phrases* les raisons de chacun de vos choix.

Remarque : pour répondre aux questions, il n'est pas demandé de faire les calculs, mais vous devez *argumenter* votre réponse ; de plus pour chaque question l'une des deux réponses est vraie, et l'autre fausse, donc une justification du style "ça ne peut pas être [A], parce que ....., donc c'est [B]" est valide.

Q1. Soit $A(z)$ la série génératrice ordinaire d'une classe $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{C}$ la classe des paires ordonnées (α, β) d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que $|\alpha| = |\beta|$. Alors la série génératrice ordinaire de $\mathcal{C}$ vérifie :

(A) $C(z) = \sum_n A_n^2 z^{2n}$ **(B)** $C(z) = \left(\sum_n A_n z^n\right)^2$

Q2. Soit $k_n = [z^n]\dfrac{1}{\sqrt{1-3z}} \log \dfrac{1}{1-2z}$. Alors :

(A) $k_n \sim \log 3 \dfrac{3^n}{\sqrt{\pi n}}$ **(B)** $k_n \sim \sqrt{2}\dfrac{2^n}{n}$

Q3. On considère $f_n = [z^n] \exp\left(e^{e^z - 1} - 1\right)$. Alors :

(A) $f_n \to 0$ et $n! f_n \to \infty$ **(B)** $f_n \to \infty$ et $n! f_n \to \infty$

Q4. Soit a_n le nombre d'arbres 1-4 (arbres plans enracinés non-étiquetés dont les sommets ont degré 0, 1, ou 4) de taille n. Il existe deux constante réelle positives α et β telles que :

(A) $a_n \sim \alpha\sqrt{n}\,\beta^n$ **(B)** $a_n \sim \alpha n^{-3/2}\,\beta^n$

Q5. Le comportement asymptotique de $a_n = [z^n]\dfrac{e^{3z}}{\sqrt{(1-2z)}}$ vérifie :

(A) $a_n \sim 2^n e^{\sqrt{n}}$ **(B)** $a_n \sim 2^n (\pi n)^{-1/2} e^{3/2}$

Q6. Soit $\mathcal{A}$ la famille des arbres planaires généraux non-étiquetés enracinés sans sommets unaires (les degrés des sommets sont restreints à $\{0, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$). La série génératrice (ordinaire) de dénombrement de $\mathcal{A}$ est :

(A) $A(z) = \frac{1+z}{1-\sqrt{1-6z+z^2}}$ **(B)** $A(z) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-2z-3z^2}}{2(1+z)}$

Q7. La série génératrice exponentielle bivariée $E(z, u)$ des permutations de taille n ayant k cycles de longueur 2 est :

(A) $E(z, u) = \frac{e^{(u-1)z^2/2}}{1-z}$ **(B)** $E(z, u) = \frac{1+2z}{2(1-z)^u}$

Q8. Soit $T(z)$ la série génératrice définie par $T(z) = z\exp(T(z))$. La série génératrice exponentielle des applications de $[n]$ dans $[n]$ sans point fixe est :

(A) $\frac{e^{-T(z)}}{1-T(z)}$ **(B)** $\frac{1-T(z)+T(z)^2}{1-T(z)}$

B/ Temps moyen d'addition par propagation de retenues

On rappelle que la transformée de Mellin d'une fonction $f(z)$ est definie par :

$$f^\star(s) = \mathscr{M}[f(z); s] = \int_0^\infty f(z) z^{s-1} dz$$

et que la bande fondamentale *est la bande verticale et maximale du plan complexe dans laquelle l'integrale definissant $f^\star(s)$ est absolument convergente. On rappelle aussi que*

$$\zeta(s) := \sum_{k\geq 1} k^{-s} \qquad \textit{et} \qquad \Gamma(s) := \mathscr{M}[e^{-x}; s] = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Par ailleurs, la fonction $\zeta(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec (entre autres) un pôle simple en $s = 1$, tel que, lorsque $s \to 1$, $\zeta(s) = 1/(s-1) + \gamma + O(s-1)$. La fonction $\Gamma(s)$ est analytique sauf en $s = -k$, pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ et on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ainsi que $\Gamma(s+1) = 1 - \gamma s + O(s^2)$ lorsque $s \to 0$.

I – Plus longue suite de "1" dans les mots binaires

On considère des mots sur un alphabet binaire $\{0, 1\}$ et on souhaite estimer la longueur de la plus longue suite de 1 consécutifs dans un mot choisi uniformément au hasard parmi tous les mots de longueur n.

B1. Trouver une description non-ambigue des mots qui ne contiennent pas de suite de k "1" consécutifs. En déduire la série génératrice ordinaire $g_k(z)$ de tels mots et que le nombre de mots de longueur n qui ne contiennent pas de suite de k "1" consécutifs est

$$g_{nk} := [z^n] g_k(z) = [z^n] \frac{1 - z^k}{1 - 2z + z^{k+1}}. \tag{1}$$

B2. Montrer que le dénominateur de (1) a une unique racine de plus petit module, et qu'elle est réelle ; dans la suite, on la note ρ_k. Montrer que $\rho_k \in [1/2, 1]$.

B3. Trouver, en fonction de ρ_k, un équivalent de g_{nk} pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et lorsque $n \to \infty$.

B4. Montrer que $\rho_k = \frac{1}{2}(1 + 2^{-k-1} + O(k2^{-2k}))$. (On pourra procéder par rafinements successifs.) En déduire une approximation de la probabilité q_{nk} qu'un mot aléatoire ne contienne pas de suite de k "1" consécutifs, qui est a priori valide pour $k \in \mathbb{N}$ fixé.

B5. En déduire une expression pour la longueur moyenne $\mathbb{E}[L_n]$ de la plus grande suite de "1" dans un mot aléatoire, et justifier sommairement l'approximation

$$\mathbb{E}[L_n] = \sum_{k\geq 1} (1 - \hat{q}_{nk}) + O(n^{-1/2}) \qquad \text{où} \qquad \hat{q}_{nk} = e^{-n2^{-k-1}},$$

en admettant que l'approximation de **Q4** est en fait valide uniformément en k.

B6. Calculer la transformée de Mellin $F^\star(s)$ de la fonction

$$F(x) = \sum_{k\geq 1} (1 - e^{-x2^{-k-1}})$$

et donner sa bande fondamentale (où elle converge absolument).

B7. En déduire un développement asymptotique de $\mathbb{E}[L_n]$ qui est précis à $o(1)$ près.

II – Application à l'étude des propagation de retenues

On considère maintenant l'algorithme d'addition suivant : Soit deux nombres x et y, dont les représentations en base 2 sont respectivement $(\dots, x_i, x_{i-1}, \dots, x_1, x_0)_2$ et $(\dots, y_i, y_{i-1}, \dots, y_1, y_0)_2$. En vue de les additionner, on peut calculer

$$s_{xy} = (\dots, s_i, s_{i-1}, \dots, s_1, s_0)_2 \quad \text{et} \quad c_{xy} = (\dots, c_i, c_{i-1}, \dots, c_1, c_0)_2,$$

tels que pour tout $i \geq 0$, $0 \leq s_i = x_i + y_i - 2c_{i+1} \leq 1$. L'entier c_{xy} encode donc la suite des retenues. Il est immédiat que :

$$x + y = s_{xy} + c_{xy} \qquad \text{et} \qquad \Sigma x + \Sigma y = \Sigma s_{xy} + 2\Sigma c_{xy},$$

où $\Sigma x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ désigne la somme des bits de x. Il s'ensuit qu'on peut obtenir $x + y$ par l'algorithme suivant :

$$(x, y) \leftarrow (s_{xy}, c_{xy}) \quad \text{until} \quad c_{xy} = 0,$$

la valeur finale du vecteur étant $(x + y, 0)$.

On s'intéresse au nombre moyen d'itération t_n nécessaire pour additionner deux entiers aléatoires entre 0 et $2^n - 1$. Pour fixer les idées, étant donnés deux entiers x et y, le nombre d'iteration $t(x, y)$ est donc :

$$\begin{array}{ll} t(x,y) = 0 & \text{si } y = 0 \\ t(x,y) = 1 + t(s_{xy}, c_{x,y}) & \text{si } y \neq 0. \end{array}$$

Soit p_{nk} la probabilité que $t(x, y) > k$ lorsque x et y sont uniformément choisis indépendamment dans $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

B8. Calculer p_{n0} et montrer que

$$p_{nk} = \frac{a_{nk}}{2^{2n}},$$

où a_{nk} est le nombre de paires d'entiers $(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)_2$ et $(y_{n-1}, \dots, y_1, y_0)_2$ tels qu'il existe $j \in 0, 1, \dots, n - k - 1$ pour lequel

$$x_j + y_j = 2 \qquad \text{et} \qquad x_i + y_i = 1 \text{ pour } j < i \leq j + k\,.$$

B9. En considérant séparément les paires qui satisfont la condition si dessus pour $j = n - k - 1$ et celles pour lesquelles $j < n - k - 1$ en déduire une récurrence pour a_{nk}. En déduire que la série génératrice $P_k(z) = \sum_{n \geq 0} p_{nk} z^k$ est donnée par

$$P_k(z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{Q_k(z)},$$

où

$$Q_0(z) = 1 - \frac{z}{2} \qquad \text{et} \qquad Q_k(z) = 1 - z + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^k \quad \text{si } k \geq 1.$$

B10. On note $1 + \epsilon_k$ la racine de $Q_k(z)$ de module minimum (on admet qu'elle est unique). Justifier de manière combinatoire qu'on doit avoir $\epsilon_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que $\epsilon_k = 2^{-k-1}(1 + O(k2^{-k}))$ lorsque $k \to \infty$.

B11. On admet que $1 + \epsilon_k$ est la seule racine de $Q_k(z)$ de module au plus 2. En utilisant le théorème des résidus sur le cercle de rayon 2, montrer que

$$\left| 1 - p_{nk} + \frac{1}{(1 + \epsilon_k)^{n+1} Q_k'(1 + \epsilon_k)} \right| \leq 2^{-n}.$$

En déduire que, uniformément pour $k \geq 0$,

$$p_{nk} = 1 - \frac{1}{(1 + \epsilon_k)^n (1 - (k - 1)\epsilon_k)} + O(2^{-n})\,.$$

B12. De manière similaire à ce qui est fait en **B5** déduire une approximation de t_n par une série à $O(n^{-1/2})$ près, ainsi qu'un développement asymptotique de t_n à $o(1)$ près.

C/ Cycles dans les graphes aléatoires sous-critiques

Dans cette partie, on considère des graphes aléatoires $G(n,\, M)$ construits avec n sommets étiquetés et M arêtes tirées aléatoirement uniformément parmi les $\binom{n}{2}$ arêtes possibles. On supposera que $\frac{M}{n} < \frac{1}{2} - \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Dans toute la partie, on supposera que le graphe réalisé par notre tirage aléatoire n'aura que des arbres et des composantes connexes unicycliques (qu'on appelera simplement cycles ou unicycles par la suite). On demande à l'étudiant d'exprimer toutes les séries génératrices exponentielles (SGEs) en fonction de la série des arbres $T(z) = ze^{T(z)}$.

C1. Soit $X_{n\,M}$ le nombre de composantes unicycliques du graphe aléatoire. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = \mathbb{P}\left[X_{n,\,M} = k\right]$ la probabilité que le graphe contienne exactement k unicycles. Exprimer p_k en utilisant des SGEs.

C2. Montrer alors que p_k peut se calculer en utilisant une intégrale de la forme

$$F(n,\, M) \oint g_k(z) e^{nh(z)} dz\,.$$

(Donner les formes explicites de $F(n, M)$, de $g_k(z)$ et de $h(z)$.)

C3. En utilisant la formule de Stirling et la méthode dite du point col, calculer un équivalent de p_k, quand $n \to \infty$ et $M = cn$ avec $0 < c < 1/2$ (dans la méthode du col avec $z = z_0 e^{i\theta}$ avec z_0 vérifiant $h'(z_0) = 0$, on admettra que la contribution de l'intégrale est concentrée autour des valeurs de $-\theta_0 < \theta < +\theta_0$ avec $\theta_0 = \theta_0(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ mais $n\theta_0^2 \to +\infty$ tandis que $n\theta_0^3 \to 0$).

C4. En déduire que p_k se comporte comme une variable aléatoire de Poisson (i.e. $p_k \sim \frac{\lambda(c)^k}{k!} e^{-\lambda(c)}$) dont on explicitera le paramètre.

Par la suite, on va quantifier le nombre de sommets contenus sur le *plus grand* cycle.

C5. Donner une interprétation de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - \frac{n!}{\binom{\binom{n}{2}}{M}} \left[z^n\right] \frac{U(z)^{n-M}}{(n-M)!} \exp\left(\sum_{i=3}^{k} \frac{T(z)^i}{2i} \right) \right],$$

avec $U(z) = T(z) - T(z)^2/2$.

C6. Montrer que quand n est grand on a pour a et b fixés

$$\frac{n!}{\binom{\binom{n}{2}}{M}} \left[z^n\right] \frac{U(z)^{n-M}}{(n-M)!} U(z)^b \frac{e^{-T(z)/2 - T(z)^2/4}}{(1-T(z))^a} \sim 2^b \left(\frac{M}{n}\right)^b \left(1 - \frac{M}{n}\right)^b \left(1 - \frac{2M}{n}\right)^{1/2-a}.$$

C7. En combinant les résultats des deux questions précédentes, montrer qu'en moyenne la taille du plus grand cycle est asymptotiquement

$$\sum_{k \geq 0} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{(k+1)\left(1 - \frac{2M}{n}\right)}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv \right) \right).$$

C8. Exprimer alors cette espérance en fonction de la constante

$$c = \int_0^{\infty} (1 - e^{-E_1(v)}) dv \text{ avec } E_1(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}\,.$$