Jeux combinatoires

Wiesław Zielonka
www.irif.fr/~zielonka
mail: zielonka@irif.fr
IRIF, Université Paris Diderot - Paris 7

October 17, 2019

C'est quoi un jeu combinatoire ?

1. deux joueurs, Gauche et Droit,
2. un ensemble de positions, une position initiale,
3. pour chaque position un ensemble de coups (peut être différent pour chaque joueur et peut être vide)
4. Gauche et Droit jouent à tour de rôle
5. les deux joueurs possèdent l'information complète
6. pas de coups de chance
7. dans le jeu normal le joueur qui n'a plus de coup disponible est perdant
8. il est impossible d'avoir une suite infinie de coups.

Jeux comme les graphes acycliques

Sommets = positions.
Arêtes Rouges ou Bleues représentent les coups disponibles à chaque joueur.
Parfois les arêtes vertes qui représentent les coups disponibles pour les deux joueurs.

Theorem

Un de joueurs possède toujours une stratégie gagnante.

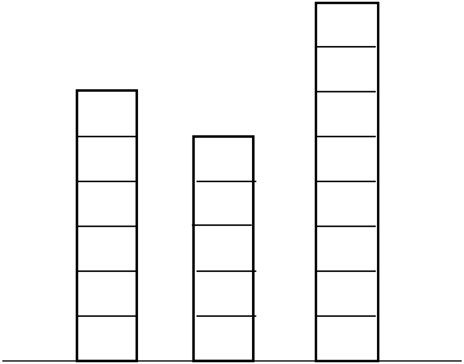
Démonstration : induction en arrière en commençant par les feuilles.

Jeux impartiaux

Jeu combinatoires est impartial si les deux joueurs possèdent exactement les mêmes coups dans chaque position.
On partitionne l'ensemble de position en positions gagnantes et positions perdantes.
La position est gagnante si le joueur qui joue dans cette position possède une stratégie *gagnante*, sinon la position est *perdante*.

Jeu Nim

Un coup de jouer consiste à enlever un nombre quelconque (au moins une) de pièces d'un seul tas.



La somme nim

La somme nim $a \oplus b$ de deux entiers non-négatifs a et b s'obtient en écrivant les deux nombres en binaire et en faisant l'addition **sans retenu** (donc $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ et $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$).
Exemple:

$$5 \oplus 9 = (101)_2 \oplus (1001)_2 = (1100)_2 = 12$$

On a $a \oplus b = b \oplus a$ et $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.
Et $a \oplus b = 0$ si et seulement so $a = b$.

Theorem (Charles Bouton 1902)

Supposant que nous avons p tas de tailles $n_1, \ldots, n_p$ respectivement.
La position $(n_1, \ldots, n_p)$ est gagnante dans le jeu Nim si et seulement si $n_1 \oplus \ldots \oplus n_p \neq 0$.

Démonstration

Soit

$$P = \{(n_1, \ldots, n_p) \mid \forall i, n_i \geq 0\}$$

l'ensemble de toutes les positions

$$W = \{(n_1, \ldots, n_p) \mid n_1 \oplus \ldots \oplus n_p \neq 0\}$$

l'ensemble de positions gagnantes (winning) (pour celui qui joue dans cette position),

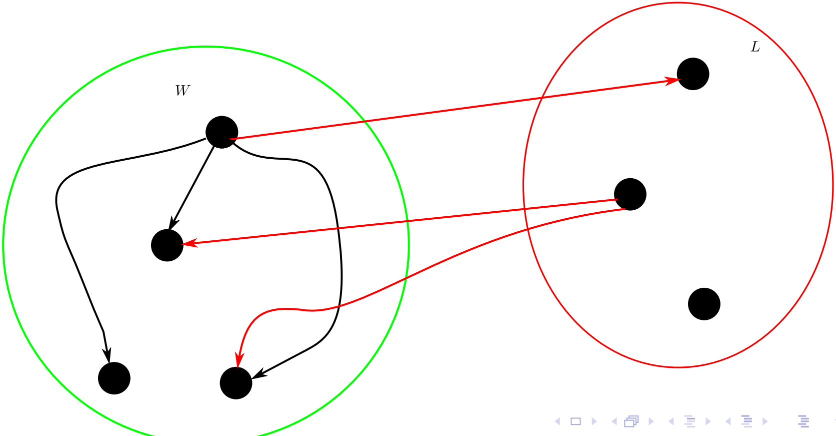
$$L = \{(n_1, \ldots, n_p) \mid n_1 \oplus \ldots \oplus n_p = 0\}$$

l'ensemble de positions perdantes (losing).
La position terminale $(0, \ldots, 0)$, avec tous les tas vides, est dans L.

Démonstration (suite)

Nous devons démontrer que

- pour chaque position dans W il existe un coup qui mène à une position dans L, et
- pour chaque position dans L tous les coups possibles mène vers W.



Démonstration (suite)

La dernière assertion est facile à démontrer.
Soit

$$\begin{aligned} A =& (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots, n_p) \in L, \\ B =& (n_1, \ldots, n_{i-1}, m_i, n_{i+1}, \ldots, n_p) \end{aligned}$$

avec $n_i > m_i \geq 0$, i.e. $A \to B$ est un coup qui diminue la taille de $i$ème tas.
Soit

$$k = n_1 \oplus \cdots \oplus n_{i-1} \oplus n_{i+1} \oplus \cdots \oplus n_p$$

la somme nim de tous les tas sauf le tas i.
Donc

$$n_1 \oplus \cdots \oplus n_{i-1} \oplus n_i \oplus n_{i+1} \oplus \cdots \oplus n_p = k \oplus n_i = 0$$

ce qui est possible seulement si $k = n_i$. Mais cela signifie que $m_i < n_i = k$ et

$$k \oplus m_i = n_1 \oplus \ldots \oplus m_i \oplus \ldots n_p \neq 0$$

c'est-à-dire $B \in W$.

Démonstration (suite)

Il reste à démontrer que pour chaque position dans W il existe un coup vers L. Soit

$$A = (n_1, \ldots, n_p) \in W$$

une position dans W, c'est-à-dire telle que

$$n_1 \oplus \ldots \oplus n_p \neq 0$$

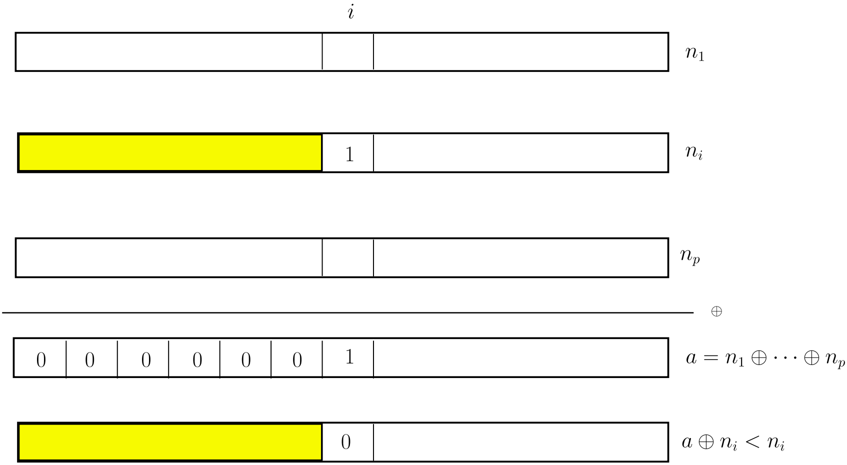
Soit

$$a = n_1 \oplus \ldots \oplus n_p$$

et

$$a = (a_l \ldots a_0)_2$$

la représentation binaire de a telle que $a_l = 1$.
Alors il existe un tas i tel que l-ème bit de n_i est 1.



$$m_i = a \oplus n_i$$

$$n_1 \oplus \cdots \oplus n_{i-1} \oplus m_i \oplus n_{i+1} \oplus \cdots n_p =$$

$$n_1 \oplus \cdots n_{i-1} \oplus (a \oplus n_i) \oplus n_{i+1} \oplus \cdots \oplus n_p =$$

$$a \oplus (n_1 \oplus \cdots \oplus n_i \oplus \cdots \oplus n_p) = a \oplus a = 0$$

Démonstration (suite)

Conclusion : il suffit de diminuer la taille de $i$ème tas de n_i à m_i pour obtenir la configuration dont la somme nim est0.

Poker Nim

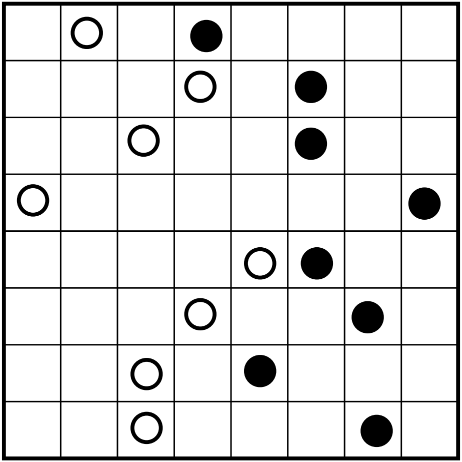
Le jeu est joué comme le jeu nim, avec des tas de pièces.
Mais de plus chaque joueur possède un sac, initialement vide, où il peut mettre les pièces qu'il a enlevées.
Le coup d'un joueur consiste à

- soit enlever de pièces d'un tas et les mettre dans son sac
- soit prendre de pièces de son sac et les mettre sur un tas.

Le jeu est potentiellement infini mais peut être réduit au jeu nim. (**exercice!**).

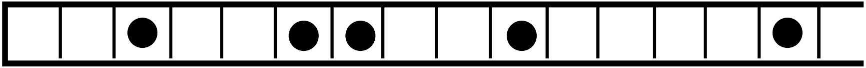
Jeu de Northcott's

Joué sur un damier. Une pion blanc et un noir sur chaque ligne. Le joueur peut déplacer un pièce de sa couleur sur une case libre sur sa ligne sans sauter au-dessus de la pièce de son adversaire. Le jeu peut être réduit au jeu nim. (**exercice**).



Jeu de dollar d'argent

Joué sur une bande infinie à droite avec un nombre fini de pièces. Un coup consiste à déplacer une pièce à gauche sans sauter au-dessus d'une autre pièce.



Théorie de Sprague Grundy de jeux combinatoires impartiaux

Le jeu est impartial si les deux joueur ont les même coup dans chaque position.
Notation:
nous allons coder les jeux impartiaux comme les couples (P, γ), où P l'ensemble de positions et

$$\gamma : P \longrightarrow 2^P$$

une fonction qui pour chaque position $p \in P$ donne l'ensemble $\gamma(p) \subset P$ de position qui sont accessible d'un coup à partir de p.

La fonction de Grundy est une fonction

$$G : P \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que pour chaque position p, $G(p)$ le plus petit entier (non-négatif) qui n'apparaît pas dans l'ensemble

$$\{G(y) \mid y \in \gamma(p)\}.$$

Pour un sous-ensemble fini X de $\mathbb{N}$ nous définissons

$$\mathrm{mex}(X)$$

(minimal excluded) comme le plus petit entier non-négatif qui n'est pas dans X.
Donc

$$G(x) = \mathrm{mex}\{G(y) \mid y \in \gamma(x)\}$$

Exemple:
$\mathrm{mex}\{0, 4, 8, 9, 10\} = 1$

Theorem

Soit G la fonction de Grundy d'un jeu.

$$W = \{x \in X \mid G(x) > 0\}$$

est l'ensemble de positions gagnantes (winning) et

$$L = \{x \in X \mid G(x) = 0\}$$

l'ensemble de positions perdantes (losing).

Si $\gamma(x) = \emptyset$ alors x est une position terminale et par définition $G(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in L$.
Il faut vérifier que

- pour chaque $x \in W$ il existe $y \in \gamma(x)$ tel que $y \in L$ et
- pour chaque $x \in L$, chaque $y \in \gamma(x)$ est dans W.

(Trivial, n'est-ce pas?)
La stratégie pour un $x \in W$ est d'aller dans une position $y \in \gamma(x)$ telle que $G(y) = 0$.

Somme de jeux

Soit $\Gamma_1 = (P_1, \gamma_1)$ et $\Gamma_2 = (P_2, \gamma_2)$ deux jeux impartiaux.
La somme $\Gamma_1 + \Gamma_2$ de Γ_1 et Γ_2 est le jeu dont l'ensemble de position est

$$(X_1 \times X_2, \gamma),$$

et la fonction de coup γ est définie de façon suivante pour $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

$$\gamma(x_1, x_2) = \{(y_1, x_2) \mid y_1 \in \gamma_1(x_1)\} \cup \{(x_1, y_2) \mid y_2 \in \gamma_2(x_2)\}$$

Theorem

Avec la notation précédente:

$$G(x_1, x_2) = G_1(x_1) \oplus G_2(x_2)$$

où G, G_1 *et* G_2 *les fonctions de Grundy de jeux* $\Gamma_1 + \Gamma_2$, Γ_1 *et* Γ_2 *respectivement.*

Soit n le jeu nim avec un seul tas de n pièces.
Quelle est la valeur de la fonction de Grundy, $G(n)$ pour cette configuration?

La fonction Grundy pour le jeu nim

$$G(n) = n$$

Soit

$$(n_1, \dots, n_p)$$

la configuration de jeu nim avec p tas de pièces, n_i le nombre de pièces dans le tas i.

Alors

$$G(n_1, \dots, n_p) = n_1 \oplus \cdots \oplus n_p$$

La définition récursive de l'addition nim

$$a \oplus b = \mathrm{mex}\{a' \oplus b \mid a' < a\} \cup \{a \oplus b' \mid b' < b\}$$

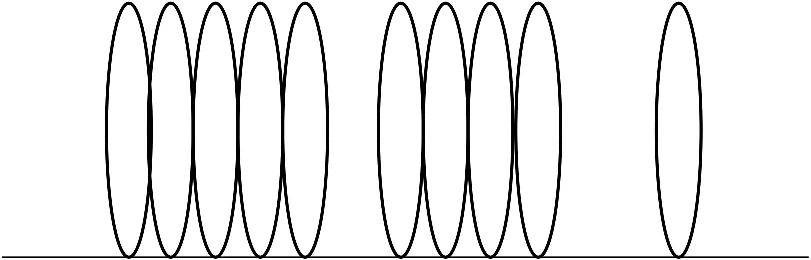
Nim multiplication

$$a \otimes b = \operatorname{mex}\{(a' \otimes b) \oplus (a \otimes b') \oplus (a' \otimes b') \mid a' < a \quad \text{and} \quad b' < b\}$$

Keyles

Le jeu joué avec des quilles.
Un coup valide:

- soit enlever une quille,
- soit enlever deux quilles qui se touchent.



Keyles - calcul de la fonction de Grundy

$$
\begin{aligned}
&G(K_0) = 0\\
&G(K_1) = \text{mex}\{0\} = 1\\
&G(K_2) = \text{mex}\{0, 1\} = 2\\
&\gamma(K_3) = \{K_1, K_2, K_1 + K_1\}\\
&G(K_3) = \text{mex}\{1, 2, 1 \oplus 1\} = 3\\
&\gamma(K_4) = \{K_2, K_3, K_1 + K_1, K_1 + K_2\}\\
&G(K_4) = \text{mex}\{2, 3, 1 \oplus 1, 1 \oplus 2\} = 1\\
&G(K_n) = \text{mex}\{G(K_i) \oplus G(K_j) \mid i + j = n - 1 \text{ ou } i + j = n - 2\}
\end{aligned}
$$