

FICHE TD 4 - SUITES ET SERIES NUMERIQUES

Exercice 1 .

Etudier les suites (u_n) dont le terme général est donné par :

$$\begin{array}{llllll}
 1) u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} & 2) u_n = \frac{n^2}{e^n} & 3) u_n = \frac{\sin(n)}{n^2} & 4) u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) & 5) u_n = \sqrt[n]{n+1} \\
 6) u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & 7) u_n = n \sin\left(\frac{2}{n}\right) & 8) u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \text{ positifs} & 9) u_n = \frac{2^n}{n^2}
 \end{array}$$

Exercice 2 .

Donner la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{llllll}
 1) u_n = q^n & 2) u_n = \frac{1}{4^n \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)} & 3) u_n = \frac{1}{4^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} & 4) u_n = \frac{n!}{n^n} \\
 5) u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a \text{ réel} & 6) u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)} & 7) u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n} & 8) u_n = n^{\alpha+1}
 \end{array}$$

Exercice 3 .

Ecrire le nombre rationnel $1,037037\dots037\dots$ sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers.

Exercice 4 .

a) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Simplifier la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ et en déduire la convergence de la suite $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

c) En déduire la somme de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$.

Exercice 5 .

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ les séries suivantes sont-elles convergentes ? Calculer leur somme lorsque $\alpha = 1$.

$$\begin{array}{l}
 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(n-1)} \\
 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}
 \end{array}$$

Exercice 6 .

En exprimant $u_n = \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\sum u_n$.